UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FILARETE ON LINE
Pubblicazioni della Facoltà di Lettere e Filosofia

FRANCO REBUFFO

Hegel e il pensiero matematico della sua epoca

Firenze, La Nuova Italia, 1989
(Pubblicazioni della Facoltà di Lettere e Filosofia dell'Università degli Studi di Milano, 130)

PUBBLICAZIONI
DELLA FACOLTÀ DI LETTERE E FILOSOFIA
DELL'UNIVERSITÀ DI MILANO

CXXX

SEZIONE A CURA
DEL DIPARTIMENTO DI FILOSOFIA

16

FRANCO REBUFFO

HEGEL E IL PENSIERO MATEMATICO DELLA SUA EPOCA

LA NUOVA ITALIA EDITRICE
FIRENZE

Rebuffo, Franco

Hegel e il pensiero matematico della sua epoca. —
(Pubblicazioni della Facoltà di lettere e filosofia
dell'Università di Milano ; 130. Sezione
a cura del dipartimento di filosofia ; 16). —
ISBN 88-221-0708-X
1. Hegel, Georg Wilhelm Friedrich – Opere –
Aspetti matematici I. Tit.
510.1

1ª edizione: ottobre 1989

INDICE

Parte Seconda

Hegel interprete della sua epoca

PREFAZIONE

Fino agli anni sessanta il nostro argomento risultava pressoché ignorato. D'altronde alla soglia degli stessi anni settanta il lavoro di M. Rehem, Hegels spekulative Deutung der Infinitesimalrechnung *(1963), poteva ancora essere considerato l'unico lavoro sull'argomento con una certa pretesa di organicità.*

Il saggio è dedicato all'esame delle prime due note sull'infinito matematico della Scienza della Logica, *considerata nella redazione del 1831, e possiamo a tutt'oggi considerarlo esemplificativo di una serie di difficoltà che hanno caratterizzato i primi approcci al problema.*

La prima difficoltà è relativa alla stessa struttura della Logica, *cosí come ci è stata tradizionalmente tramandata. È noto infatti che la* Scienza della Logica, *cui usualmente si è riferita la critica, è in realtà composita: mentre « La dottrina dell'essere » è stata tramandata nella revisione redatta nel 1831, al contrario « La dottrina dell'essenza » e « La dottrina del concetto » risalgono alle edizioni originarie rispettivamente del 1813 e 1816.*

Il problema non è di poco conto: le modifiche, apportate da Hegel in sede di revisione, sono assai rilevanti ed anche relativamente al nostro tema presentano degli inconvenienti.

Se è vero, infatti, che Hegel nella revisione del 1831 arricchisce le sue notazioni matematiche e sviluppa ex novo *argomenti inediti, è altrettanto vero che molte parti vi risultano soppresse.*

Ad esempio, nell'edizione del 1831, utilizza le sue considerazioni del 1812, dedicate originariamente alla memoria di L'Huilier vincitore del Preisaufgabe *del 1784, per commentare i* Principia *di Newton. La situazione crea indubbie difficoltà; infatti il metodo delle prime ed ul-*

*time ragioni, presso Newton, non è equiparabile alla versione datane da L'Huilier. Quest'ultimo formula la teoria dei limiti in un ambiente culturale profondamente mutato, cioè alla luce di una piú generale logica delle relazioni rappresentata dall'*Analysis situs.

È ovvio che se si procede ad un confronto diretto del testo hegeliano con i Principia *di Newton, senza considerare la stesura del 1812 originariamente dedicata a L'Huilier, si perde completamente di vista il contesto storico che ha fatto, per cosí dire, da « filtro » ad Hegel stesso.*

La seconda difficoltà è altrettanto grave: le valutazioni sulle notazioni matematiche di Hegel vengono riferite esplicitamente al rigore rappresentato dalla cosiddetta aritmetizzazione dell'analisi. *Quello che viene stabilito, in sostanza, è quanto Hegel si sia avvicinato o meno a ciò che intendiamo attualmente per analisi matematica.*

È fin troppo facile rendersi conto dei gravi inconvenienti prodotti da una simile impostazione in sede storica.

Ad esempio tutte le argomentazioni hegeliane, vertenti sull'aspetto qualitativo del nuovo calcolo, vengono sbrigativamente liquidate come altrettante digressioni filosofiche completamente amatematiche. L'ingenuità storica è evidente: Hegel non può avere come punto di riferimento l'aritmetizzazione dell'analisi, al contrario si riferisce ad un'epoca matematica che fa della grandezza qualitativa un fondamentale concetto relazionale.

In tempi piú recenti l'aumentato interesse per il pensiero matematico del filosofo di Stoccarda ha indubbiamente migliorato la situazione.

Il fatto che la riflessione sulla matematica, presso Hegel, segua un arco evolutivo assai composito ha reso cruciale l'esigenza di una valutazione critica delle varie fasi, nonché una valutazione delle " fonti " che egli di volta in volta privilegia.

Possiamo riepilogare i criteri metodologici di tali lavori in questo modo.

Relativamente a singoli argomenti, o periodi determinati degli studi matematici di Hegel, viene effettuato un confronto con le " fonti " teso a stabilire come, ed in ragione di quali riferimenti storici, Hegel costruisca le sue notazioni matematiche; quindi in che modo la sua interpretazione sia fedele o meno alle impostazioni presenti nei testi originari.

Il saggio di J.O. Fleckenstein, Hegels Interpretation der Cavalierischen Infinitesimalmethode *(1974), può essere considerato rappresentativo di questo indirizzo. Il lavoro è dedicato da un lato all'esame del* *problema della composizione del continuo, secondo il metodo degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri, dall'altro all'esame delle relative valutazioni date da Hegel.*

Ora, senza voler sottovalutare gli indubbi meriti del caso, né gli altrettanto indubbi risultati raggiunti, dobbiamo rilevare che questo tipo di impostazione incontra forti limitazioni.

*È vero che Hegel, nei passi in esame, si riferisce esplicitamente a Cavalieri ma, occorre sottolinearlo, l'indivisibile che ha in mente Hegel è quello della seconda metà del settecento, quindi un indivisibile per così dire infinitesimalizzato. I matematici dell'epoca, infatti, si riferivano al passato con l'intenzione di rimetterlo in moto relativamente ad un contesto scientifico mutato, ed Hegel ha in mente proprio queste azioni di recupero; il che significa che si sta riferendo agli allora recenti sviluppi dell'*Analysis situs.

Da questo punto di vista il confronto testuale, condotto esclusivamente sulle "fonti", rappresentate da Cavalieri, non è in grado di rendere ragione dei riferimenti epistemologici sui quali si effettua la stessa valutazione hegeliana.

Vediamo di chiarificare il problema con un esempio più dettagliato.

Nei manoscritti matematici del periodo di Francoforte, Hegel interviene sul problema del quinto postulato di Euclide (assioma delle parallele).

I due contesti culturali che si riferiscono immediatamente all'argomento provengono da due direzioni distinte.

Da un lato la scuola di Pfleiderer che considerava la geometria sintetica ed il suo rigore come l'unico fondamento sicuro per "misurare" le procedure matematiche, e da cui Hegel ereditò un forte interesse per la geometria euclidea.

Dall'altro lato la pubblicazione di Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio *da parte di Klügel (1763) e* Die Theorie der Parallelinien *scritta da Lambert nel 1766 e pubblicata da J. Bernoulli nel 1786.*

Klügel svolge una panoramica storica sui tentativi di dimostrazione del quinto postulato con la convinzione, ereditata dal suo maestro Kaestner, che gli assiomi sono essi stessi i presupposti su cui si articolano le dimostrazioni. Lambert si spinge oltre e sostiene che l'ipotesi dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso possono essere entrambe congruenti ad una geometria sferica che rappresenterebbe un altro universo ri-

spetto alla geometria piana (l'angolo acuto risulterebbe pertinente ad una superficie sferica di raggio immaginario).

Hegel, a sua volta, interviene sul problema facendo valere una serie di convinzioni epistemologiche, relative agli assiomi, *che perfezionerà e ribadirà con forza nella* Scienza della Logica. *Possiamo schematizzarle in questo modo.*

Gli assiomi presuppongono un radicale processo di soppressione del concreto (è un « porre ciò che si vuole porre ») per cui già il modo peculiare mediante cui si costruiscono gli elementi semplici *indica che si è voluto costruire un mondo ideale in cui valgono precise regole dimostrative e non altre; trattasi appunto di un* universo *costruito sull'*unicità della parallela.

Quindi Euclide si sarebbe comportato in maniera formalmente ineccepibile, semmai avrebbe dovuto corredare di una giustificazione filosofica i suoi assiomi, quindi avrebbe dovuto giustificare filosoficamente il processo di soppressione del concreto.

Risulta evidente, dallo schizzo delle argomentazioni hegeliane, che il filosofo di Stoccarda non entra nel merito di ciò che oggi chiameremmo dimostrazioni di indipendenza, *questo perché gli interessi hegeliani non sono di tipo matematico in senso stretto.*

Gli assiomi non sono giudicati dal punto di vista del rigore, *il che implicherebbe la dimostrazione della loro* indipendenza logica *(indipendenza del quinto postulato dagli altri assiomi), quanto piuttosto dal punto di vista della loro* formazione *(processo di soppressione del concreto).*

Per questi motivi, se cerchiamo di rintracciare il senso delle argomentazioni hegeliane nella Recensio *di Klügel o nella* Theorie *di Lambert, rimaniamo inevitabilmente delusi. Altrettanto se cerchiamo di rintracciarne il senso nella teorica geometrica di Pfleiderer.*

Un'indagine basata su confronti testuali così limitati non può che procedere ad una descrizione delle fonti su cui Hegel riflette immediatamente per poi concludere, come si fa nella maggior parte dei casi, che egli, in seconda istanza, fa valere sull'argomento sue particolari concezioni filosofiche.

Ma il quesito più importante è proprio questo. In che misura Hegel è entrato in contatto con una epistemologia matematica che ha già provveduto ad orientarsi filosoficamente nel senso proposto da Hegel stesso? Od almeno: in che misura l'epistemologia matematica dell'epoca offre un panorama di riflessioni che lo inducono a trarre simili conclusioni?

Dobbiamo ricordare che una delle caratteristiche della filosofia della matematica dell'epoca era appunto la riflessione sul senso epistemologico dei cosiddetti elementi semplici, *i quali avevano la prerogativa, in certo qual modo, di annientare il concreto.*

Ad esempio una procedura reiterata di raddoppiamento della secante *finiva per individuare una posizione in cui* secante, arco di circonferenza *e* tangente *risultavano indistinguibili; tuttavia era proprio in virtú di questo annientamento che era possibile individuare un unico campo di relazioni capace di rendere ragione di tutte le fasi intermedie del processo.*

Il problema, all'epoca, era quello di fondare una teoria della conoscenza che in qualche modo legittimasse il paradosso dell'indistinguibilità e della soppressione come un fatto virtuoso; e questo aspetto finirà per avere una influenza estremamente rilevante presso Hegel.

Come si può notare non entrano soltanto in gioco i testi specifici sul quinto postulato, ma la stessa cultura epistemologica che ne costituiva il contesto storico.

Il senso di quello che siam venuti dicendo è diretto ad evidenziare il fatto che Hegel è soprattutto un filosofo della matematica ed il suo intento è quello di riepilogare globalmente un'intiera epoca scientifica. Quindi, a ben considerare, l'oggetto della trattazione non è semplicemente costituito dalle teorie specifiche su cui immediatamente porta la sua riflessione, ma altresí da una fondamentale mediazione già avvenuta in sede storica: trattasi di quel complesso di riflessioni epistemologiche, sviluppatesi nella seconda metà del settecento, che hanno già provveduto a costruire una visione del mondo *della matematica.*

Possiamo riepilogare il senso di una sorta di "sfida" che Euler lancia ai filosofi con la seguente dizione: se le procedure della scienza mettono capo ad antinomie non è certo la scienza a dover mutare i suoi metodi e le sue indagini, al contrario sono i filosofi che debbono approntare i quadri concettuali atti a fornire loro una efficace giustificazione. Ebbene il filo della nostra indagine ci porta proprio ad accertare in che misura Hegel sia stato un efficace interprete della sua epoca matematica.

Per questi motivi abbiamo diviso il lavoro in due parti.

Una prima parte è dedicata all'esame dell'epoca matematica cui si riferisce Hegel. Ovviamente la disamina non vuol essere una completa storia della matematica *del periodo in esame, quanto piuttosto un'indagine orientata a rappresentare i punti salienti di una cultura matematica che era caratterizzata da una sorta di recupero del passato (recupero del-*

le vecchie metafisiche del moto) con tutti i problemi epistemologici che questo fatto implicava, soprattutto in relazione al loro impatto traumatico con la filosofia.

La seconda parte è costituita dall'indagine vera e propria sulle riflessioni matematiche di Hegel.

L'intento è quello di seguire l'evoluzione del pensiero matematico del filosofo a partire dalle sue prime letture, condotte sui manuali di Kaestner, per finire agli anni della revisione del primo volume della Logica, *soprattutto in relazione alle due branche principali degli argomenti hegeliani: quella relativa alla* höhere Mathematik *e quella relativa alla* geometria.

L'obiettivo che ci siamo posti è dunque di verificare in che misura, ed in relazione a quali elementi testuali, Hegel, fatta salva la sua personale evoluzione sugli argomenti, riesce ad essere un interprete filosoficamente adeguato di un'epoca matematica caratterizzata da dibattiti estremamente cruciali e difficili sia nel contesto piú specifico della pratica matematica *sia in quello piú propriamente* epistemologico *e* fondazionale.

* * *

Vorrei terminare ringraziando il Prof. Mario Dal Pra, che mi ha sostenuto e incoraggiato nel proseguire uno studio protrattosi per un arco di tempo assai lungo, inoltre il Prof. Massimo Galuzzi con il quale ho avuto modo di discutere gli argomenti matematici. Ringrazio infine particolarmente il Prof. Enrico Rambaldi: le conversazioni con lui mi hanno indotto a rivedere il lavoro, sino a pervenire alla forma attuale.

Parte I

IL PROBLEMA DEI DIFFERENZIALI TRA FORMALISMO E METAFISICA NELLA SECONDA METÀ DEL SETTECENTO

INTRODUZIONE E DELINEAZIONE DEL PROBLEMA

Lungo l'arco di tempo, segnato dal primo cinquantennio del settecento, le tecniche matematiche per trattare le *funzioni* costituivano una serie di metodi completamente paratattici. Trattare le funzioni mediante le *serie* oppure mediante le procedure algebriche ordinarie costituiva un insieme di possibilità metodologiche senza alcun apprezzabile collegamento.

La situazione poteva ritenersi alquanto insicura rispetto al rigore. Oltretutto le serie, di per se stesse, non offrivano grosse garanzie: i concetti chiave del calcolo differenziale risultavano fino ad allora fondati esclusivamente sulle metafisiche del moto mentre l'estensione delle ordinarie procedure algebriche ad una prospettiva dell'infinito non poteva essere ritenuta metodologicamente indenne da obiezioni.

In questo contesto la comparsa dell'*Introductio in analysin infinitorum* (Euler 1748) segna una svolta significativa.

Euler effettua una sorta di capovolgimento metodologico circa i problemi dei fondamenti della matematica. In luogo di considerare i paradigmi algebrici come basi per successive estensioni alle serie, fonda direttamente lo studio delle funzioni sulle serie, siano esse finite o infinite.

I vantaggi di una simile procedura ci risultano alquanto evidenti. In luogo di tentare improbabili spiegazioni algebriche relativamente a concetti scottanti, quali quelli di *derivata* o di *differenziale*, li si considera come concetti primitivi, implicitamente definiti dalla stessa logica di sviluppo delle serie. Ad esempio il differenziale può essere ritenuto un semplice operatore di calcolo, relativo agli sviluppi in serie, la derivata un semplice coefficiente e cosí via.

Trattasi di una situazione che presenta forti analogie con fenomeni che si erano già verificati nell'ambito della matematica.

La stessa algebra, per affermarsi, aveva dovuto sottostare ad un analogo capovolgimento fondazionale.

È noto che uno dei meriti della teoria eudossiana delle proporzioni consisteva proprio nell'aver rovesciato i suoi rapporti di dipendenza, logici e storici ad un tempo, con il concetto aritmetico di grandezza. Non si trattava piú di far dipendere i criteri della proporzionalità dai preesistenti canoni aritmetici, bensí quello di fondare direttamente sulle nuove regole un intiero edificio scientifico. Il che equivaleva a definire implicitamente un nuovo concetto di grandezza indipendentemente dalla possibilità o meno di aritmetizzarlo.

Euler, nella sua *Introductio*, opera in maniera analoga: apre una prospettiva inedita che svincola i nuovi concetti dall'algebrizzazione e lascia che risultino implicitamente definiti dalla nuova logica seriale.

La rappresentabilità di una funzione, nel suo campo di definizione, mediante un'unica espressione analitica, quindi mediante un'unica espressione seriale, garantisce di per se stessa la continuità della funzione e quest'ultima prerogativa, stante l'impostazione del problema, risulta formalmente correlata alla differenziazione ed alla integrazione [1].

In tal modo la matematica viene liberata da tutte le incertezze che l'avevano caratterizzata sino a quel momento. I concetti-chiave risultano tutti collocati in un contesto formalmente ineccepibile e le vecchie spiegazioni, affidate in ultima analisi alle metafisiche del moto, sembrano diventare improvvisamente superflue.

Pareva che la matematica, al compimento del primo cinquantennio del secolo, avesse finalmente imboccato una via sicura, tuttavia, in maniera del tutto repentina, le certezze formali si rivelarono molto meno sicure del previsto.

Per la verità il problema ebbe origine in un ambito di carattere fisico: si trattava di studiare le vibrazioni di una *corda* in un piano. Successivamente l'impatto sulla matematica " pura " risultò alquanto traumatico.

Dato che la soluzione del problema fisico consisteva nel trovare una funzione in grado di descrivere la corda in vibrazione, la via mi-

[1] Gli argomenti che abbiamo esposto costituiscono uno spaccato metodologico dell'opera di L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne 1748; ora in *Opera Omnia,* serie I, voll. VIII-IX, Leipzig - Berlin 1922.

gliore era quella di partire da determinati « tassi di variazione » atti ad esprimere un qualche " collegamento " con la soluzione del problema, cioè con la funzione che si doveva determinare. Infatti le informazioni iniziali, concernenti dette " variazioni ", permettevano di costruire delle equazioni che, in linea di principio, dovevano contenere alcune derivate della funzione incognita. È chiaro che si poteva contare, in questo caso, su di un potenziale collegamento con ciò che si andava cercando.

Dunque, si doveva presumere che la procedura di integrazione (all'epoca interpretata esclusivamente come operazione inversa della differenziazione) permettesse di risalire, senza alcuna restrizione formale, ai nessi funzionali originari. Generalizzando opportunamente, si poteva individuare senza difficoltà la funzione della *corda vibrante*.

Perché tanta certezza? La formalizzazione euleriana implicava una stretta correlazione tra i concetti di derivabilità, continuità ed integrabilità, per cui una semplice operazione inversa (integrazione) doveva necessariamente conservare il requisito fondamentale della continuità, pena la messa in discussione dello stesso rigore matematico.

Ebbene ci si accorse che le funzioni, ottenute mediante integrazione, non rispettavano i vincoli formali. Vi erano punti del loro dominio in cui si verificavano evidenti discontinuità.

Esaminando le *memorie* dei matematici che intervennero sul problema, si può facilmente osservare che l'equivoco di fondo consisteva nei differenti modi di intendere la nozione di funzione, cioè proprio quella nozione che, stante le regole della sua formalizzazione, avrebbe dovuto essere considerata inequivocabile a partire dal 1748.

La spaccatura fu notevole. Matematici come d'Alembert ritennero che l'integrazione di equazioni differenziali alle *derivate parziali* aprisse un campo di oggetti che non sempre poteva essere ritenuto di stretta pertinenza matematica, altri, e fra questi vi fu lo stesso Euler, ritennero che gli oggetti in questione, data la loro crucialità, non potessero essere esclusi dall'ambito dell'indagine; caso mai quello che doveva essere rettificato era proprio il giudizio di fiducia incondizionata nei confronti dei processi di formalizzazione.

Ritenere che l'unico modo di fare matematica sia quello " puro " legato al rigore formale, sostiene Daniel Bernoulli, finisce per tradursi in una grave iattura. Ancora Euler, nelle sue *Institutiones calculi differentialis* (1755), pensa che l'identificazione *seriale* della nozione matematica di funzione non renda ragione della complessità del concetto stesso.

Con ciò prende corpo la convinzione che il rigore formale, pur con tutti i pregi del caso, contenga anche delle " rigidità " che, da un certo punto di vista, limiterebbero la possibilità dell'indagine [2].

Sarebbe senz'altro piú efficace il globalismo tipico delle vecchie metafisiche del moto, meno sicure dal punto di vista del rigore ma, nello stesso tempo, piú ricche quanto al loro contenuto. Su questa base Euler, sette anni dopo aver enunciato i canoni rigorosi della formalizzazione, ripropone la fondazione del concetto di funzione sulle metafisiche, ritenendo queste ultime in grado di coprire quei contenuti cui la stessa formalizzazione è costretta a rinunciare.

Quindi in un arco di tempo relativamente breve, e sotto l'evidente influsso del dibattito sulle corde vibranti, si verifica all'interno della matematica un vero e proprio ritorno a tematiche del passato. Con esso si ripropongono quei problemi che avevano caratterizzato, quasi un secolo prima, il dibattito sui differenziali e sui fondamenti.

La seconda metà del settecento si apre su di uno scenario matematico caratterizzato da una evidente divaricazione epistemologica. L'unico mezzo tecnico per trattare le funzioni continua ad essere rappresentato dalle serie analitiche, tuttavia, accanto all'approccio formale, si sviluppa una matematica quasi-empirica, fondata, per dirla con Euler, sulla descrizione concreta dei fenomeni. In questo secondo caso si tratta di affrontare quelle funzioni che mostrano un comportamento atipico nei confronti del rigore: non rispettano il teorema dell'inversione e necessitano della messa a punto di un concetto di continuità che non sia drasticamente limitato alla sola rappresentabilità mediante un'unica espressione analitica.

Operare lungo questa direzione significa lavorare alla fondazione di un concetto di continuità in certo qual modo piú esteso rispetto a quello previsto dal rigore formale. Cioè un concetto di continuità che

[2] Circa l'esame dei problemi epistemologici posti dalle *memorie* di Johann Bernoulli, d'Alembert, L. Euler, Daniel Bernoulli, J. L. Lagrange, intervenuti sul tema, rimandiamo al Cap. II, pp. 52 ss. Per avere una concisa ma efficace ricostruzione preliminare del *dibattito sulle corde vibranti* cfr. C. Truesdell, *The Rational Mechanics of Flexible Elastic Bodies, 1638-1788*, trattasi dell' " Introduzione a L. Euler " in L. Euler, *Opera Omnia*, serie II, voll. X-XI, Zurich 1960; M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York 1972; H. Burkhardt, *Entwicklungen nach oszillerenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Phisik*, JBER. dt. MAT. VEREIN, vol. X (1908), vol. X, n. 2, pp. 1-1804.

in qualche modo riesca ad includere quei casi in cui si ravvisano punti discreti. In sostanza si tratta di costruire la continuità in modo da risultare svincolata dalla nozione di derivabilità.

È evidente che il raggiungimento di risultati in questo senso permetterebbe di spiegare il comportamento di quelle funzioni (ottenute mediante integrazione di equazioni differenziali alle derivate parziali) che dovevano essere considerate continue malgrado contenessero punti discontinui.

Il *Bando* emesso dall'accademia di Pietroburgo nel 1787 aveva proprio lo scopo di ottenere risultati apprezzabili su di un argomento cosí delicato, nonché di riepilogare e sistematizzare il dibattito teorico databile orientativamente a partire dal 1755 (data di pubblicazione delle *Institutiones*).

Che cosa aveva di peculiare il dibattito? quello di inserirsi in un contesto storico in cui il problema poteva essere affrontato solo prescindendo dagli strumenti tecnici offerti dal formalismo. La logica seriale, rappresentata dalle espressioni analitiche, costituiva l'unico tipo di approccio allo studio matematico delle funzioni; ma era precisamente questo tipo di approccio responsabile di una visione per cosí dire ristretta del concetto di continuità.

L'alternativa era quella di riflettere sul concreto che sta alla base di ogni generalizzazione simbolica, riconoscendo a quest'ultimo una portata, per certi versi, piú ricca nei confronti degli stessi processi di formalizzazione. In questo senso divennero di uso comune espressioni quali la già citata *funzioni tenute insieme dalla descrizione concreta dei fenomeni* (Euler) o *funzioni date esclusivamente da condizioni materiali* (Condorcet).

Il risultato fu il verificarsi di una sorta di saldatura tra la matematica e la *höhere Mechanik*. Quest'ultima si basava sull'idea del movimento fondata sul postulato della *actio in distans*, quindi sulla necessità di un " blocco " costituito dalla meccanica e dalla geometria.

Ne risultava una situazione interessata da tutta una serie di problemi-limite, coinvolgenti l'infinito, in cui le vecchie metafisiche del moto potevano fornire quadri concettuali efficaci.

Quindi il ripristino delle metafisiche deve essere inteso come il tentativo di rappresentare globalmente il concreto e, nel caso specifico, le categorie concrete su cui portano le funzioni.

Presso i matematici questa prospettiva fu denotata come il campo di applicazione della matematica; intendendo con ciò non soltanto l'ambito in cui trovano applicazione i teoremi, ma altresí, come abbiamo già detto, le stesse basi materiali in ragione delle quali si operano le generalizzazioni simboliche. L'espressione divenne di uso comune e fu sempre intesa in questo duplice significato; lo stesso Hegel, molti anni piú tardi, ne conserva il senso titolando una delle tre celebri *Note* sul calcolo differenziale con la dizione *La Matematica dedotta dal suo campo di applicazione.*

Boscovich, con la sua *Theoria philosophia naturalis*, pubblicata per la prima volta a Vienna nel 1758 ha come obiettivo proprio quello di affrontare i problemi concreti tipici del campo di applicazione della matematica. Trattasi in genere di quei fenomeni che, pur presentando rotture improvvise, debbono essere considerati continui in quanto appartenenti ad un fenomeno naturale continuo.

L'aspetto peculiare dell'impostazione di Boscovich è di recuperare, lungo questa direzione, un concetto centrale della metafisica leibniziana: quello di *sezione.* Quindi, in ragione di un simile apparato concettuale, di definire un nuovo concetto di continuità fondato sul discontinuo, cioè sui punti di discretezza individuati dalla sezione.

Da questo momento in poi si può parlare di una continuità formale, tipica della matematica formalizzata, di una continuità concreta per cosí dire *a tratti* e di una discontinuità vera e propria, sia da un punto di vista formale sia da un punto di vista materiale [3].

Lo stesso Euler, proprio in quegli anni, precisamente nel periodo posteriore al 1755, finisce per riportare nell'ambito della considerazione matematica una serie di temi concreti, originariamente dedicati alla meccanica, sintetizzati nelle *Réflexions sur l'espace et le temps*, pubblicate dall'Accademia di Berlino nel 1748; l'intento è sempre il medesimo: considerare la base materiale della matematica come una fonte di problemi non sempre padroneggiabili da un punto di vista formale [4].

Questa impostazione, lungo tutto l'arco della seconda metà del secolo, si mantiene come l'unico tipo di approccio possibile per spiegare lo scarto tra il formalismo ed il concreto. La stessa memoria di Ar-

[3] R. G. Boscovich, *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, Wien 1758. La seconda edizione, Venetiis 1763, fu quella che ebbe una maggior diffusione nella seconda metà del secolo. Per questo motivo d'ora in avanti ci riferiremo alla redazione di Venezia. Occorre tener presente soprattutto i paragrafi 1-50.

[4] L. Euler, *Réflexions sur l'espace et le temps*, Hist. de L'Acad. des Sciences et Belles Lettre, Berlin 1748.

bogast, vincitrice del Bando, e pubblicata successivamente nel 1791, conserva una impostazione analoga distinguendo tra *continuità, discontinuità* e *discontiguità*. Si tratta di mantenere le stesse distinzioni, pertinenti il concreto, enunciate un trentennio prima da Boscovich ed Euler [5].

Nell'ambiente parigino si consolida un fenomeno analogo. Condorcet, intorno agli anni settanta, enfatizza la distinzione di Euler riprendendone in maniera quasi letterale l'impostazione: oltre alle funzioni di cui si conosce la forma, si ammettono funzioni introdotte da equazioni (la cui forma è data implicitamente) e funzioni date da certe condizioni materiali. Con ciò si ammettono all'interno della considerazione matematica, in evidente rottura con d'Alembert, anche quelle funzioni la cui dipendenza funzionale può essere ignorata od al limite non esprimibile formalmente [6].

In sostanza le metafisiche vengono usate come altrettanti sistemi atti a riepilogare globalmente il campo concreto della matematica. In questo senso prende campo una matematica, per cosí dire, quasi-empirica destinata ad influenzare in maniera decisiva la trattazione di una serie di problemi cruciali.

Non solo l'impostazione finisce per intervenire su tutti quei problemi di confine, che si presentavano all'epoca, ma orienta altresí la stessa concezione complessiva della scienza matematica, costruisce cioè una vera e propria visione del mondo.

Un esempio è facilmente rinvenibile a proposito delle proiezioni che i matematici facevano circa gli scenari futuri della loro disciplina. È ovvio che una « scelta di campo » analoga a quella operata da d'Alembert, quindi tendente ad identificare le possibilità matematiche esclusivamente in relazione alle condizioni formali rigorose, finisce per considerare esaurito il lavoro teorico che, in effetti, si era attestato in maniera stabile, per tutta la seconda metà del secolo, sulle tecniche delle serie analitiche. Al contrario le aperture metafisiche finiscono per dare uno scenario, attraversato da grossi problemi, in cui tutto è ancora da giocare.

Lagrange, in una lettera del settembre 1781 indirizzata a d'Alembert, afferma appunto che la matematica sembra una miniera che ha già esaurito le proprie risorse, destinata prima o poi ad essere abbando-

[5] L. F. Arbogast, *Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles*, Impensis Academiae Scientiarum Petropolitanae, 1971.

[6] M. - A. N. Condorcet, *Traité du calcul intégral*, Paris 1765.

nata; infatti, portato a compimento il programma di fondare le funzioni sulla logica seriale, e mostrato come tutte le funzioni matematiche siano esprimibili in serie analitiche, non resterebbe piú molto da dire, per lo meno non vi sarebbero piú problemi scottanti [7].

Dello stesso tono è il resoconto fatto da J. B. Delambre per la sezione di matematica e fisica dell'Istituto di Francia e pubblicato a Parigi nel 1810 (*Rapport historique sur le progrès des sciences mathématiques depuis 1789 et leur état actuel*) in cui si afferma che la sola cosa da fare in matematica è quella di perfezionare i dettagli [8].

Ben diversi si configurano gli scenari dal punto di vista della metafisica matematica: il campo delle funzioni si presenta come un territorio ancora tutto da esplorare, i problemi della continuità debbono in qualche modo legarsi alla discontinuità ed in genere, per esprimerci con Condorcet, si ha tutta una serie di questioni impensate che richiedono di creare nuovi metodi.

Come si può constatare i punti di vista sono inconciliabili. Il recupero del c o n c r e t o finisce per dare l'impressione di essere agli inizi di una grande impresa e non già al suo compimento.

L'arco di tempo, segnato dalla seconda metà del settecento, ci risulta caratterizzato da un ritorno alle vecchie impostazioni metafisiche. Ma se ci chiediamo in ragione di quali principi o di quali strutture si realizzava il loro effettivo funzionamento, difficilmente potremmo fornire una risposta univoca e semplice.

In linea di principio i riferimenti d'obbligo erano rappresentati dalla metafisica newtoniana e da quella leibniziana; ma, sia per il fatto che le impostazioni originarie erano per lo piú usate in un contesto storico profondamente mutato, quindi elaborate *ad hoc* in modo significativo, sia per il loro differente uso a seconda che l'ambito fosse segnato dall'effettiva pratica matematica piuttosto che dalla teoria dei fondamenti, i matematici dell'epoca spesse volte finivano per ricorrere ad un uso misto delle due prospettive.

Ciò malgrado, se seguiamo il filo dei dibattiti metafisici dell'epoca, possiamo, abbastanza facilmente, identificare due versanti in cui

[7] Cfr. J. L. Lagrange, in *Oeuvres* a cura di J. Serret, G. Darboux ed altri, 14 voll., Paris 1867-1892, vol. XIII, p. 368.

[8] J. B. Delambre, *Rapport historique sur le progrès des sciences mathématiques depuis 1789 et leur état actuel*, Paris 1810.

le due prospettive risultano distinguibili abbastanza nettamente ed in cui rispettivamente si realizza una relativa preminenza dell'una impostazione rispetto all'altra e viceversa.

Il primo ambito è costituito dal problema matematico dell'*omogeneità*, reso acuto dai quesiti fondazionali relativi al calcolo differenziale, il secondo ambito risulta costituito dal problema matematico della *continuità* e dalla conseguente possibilità di affrontarlo nella concreta pratica matematica.

Se noi teniamo presenti i due ambiti, abbiamo la possibilità di misurare efficacemente l'impatto delle due prospettive sulla matematica del continente europeo.

Vediamo di anticipare schematicamente la struttura delle due metafisiche, quella newtoniana basata sul concetto di grandezza variabile e quella leibniziana sul concetto di grandezza qualitativa, quindi vediamo di delineare brevemente le loro differenti linee di diffusione.

La metafisica matematica di Newton si presenta come una nuova geometria atta a rappresentare l'aspetto piú concreto del movimento: quello della sua misurazione.

Il moto, da questo punto di vista, assume l'aspetto di un fondamento concreto cui debbono essere ricondotte le simbolizzazioni matematiche. Trattasi di una vera e propria *analysis situs* la cui struttura nomologica è rappresentata da una metafisica geometrica.

Newton ritiene che la nuova geometria, pur aprendo inedite prospettive di indagine, conservi i medesimi criteri di rigore dell'impostazione classica: assioma di Archimede e proprietà di esaustione.

Il *De quadratura curvarum* (la versione definitiva è del 1704), riprendendo l'impostazione della *Géométrie* di Descartes, fonda unitariamente le grandezze sulla prospettiva del moto: la retta risulta generata dal movimento di un punto, la superficie dal movimento di una retta e cosí via [9].

Il moto riconduce ad una prospettiva di omogeneità elementi di per se stessi eterogenei: il punto (privo di dimensioni) e la retta (dotata

[9] Come si può notare la versione definitiva del *De quadratura curvarum*, pubblicata nel 1704 in appendice all'*Optiks*, è posteriore alla prima edizione dei *Principia*, pubblicati a Londra nel 1687. Il titolo completo è: *Tractatus de quadratura curvarum*, in *Optiks: or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colour of Light. Also two Treatise of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures*, London 1704.

di lunghezza) vengono risolti unitariamente nella prospettiva generativa del movimento.

In questo senso si aprono nuovi terreni di indagine: il moto di un punto che genera una retta identifica, in linea di principio, il problema della velocità di generazione, quindi della variazione della velocità, e conseguentemente il problema del tempo.

La nuova analisi si struttura come una vera e propria scienza del tempo e, nelle intenzioni di Newton, dovrebbe essere rappresentata e fondata da una nuova geometria in quanto misura di variazioni.

Già nel *De Analysi* (scritto nel 1669) e nel *Methodus Fluxionum* (scritto nel 1671) vengono identificate le nozioni in grado di tradurre questo nuovo indirizzo [10].

Le *fluenti* (leggi funzioni) dovrebbero rappresentare la prospettiva delle *quantità generate* e si traducono in uno strumento in grado di esprimere variazioni di grandezze; le *flussioni* (derivate) rappresentano i tassi di variazione delle stesse velocità di generazione.

È evidente che, in questo contesto, il nuovo calcolo ha per oggetto funzioni: si occupa di grandezze variabili (*fluenti*) non di grandezze determinate.

Il problema piú scottante sorge dal fatto che, nella effettiva pratica matematica, come del resto ammette a piú riprese lo stesso Newton, una flussione risulta calcolata in relazione ai *momenti*, cioè in relazione ai differenziali della funzione e della variabile; dunque, stante l'impostazione della nuova teoria, gli stessi *momenti* difficilmente possono essere ricondotti immediatamente alla semplice prospettiva della variazione.

Nella seconda edizione dei *Principia* Newton si pone il problema di fornire un'efficace fondazione all'intiera procedura e lo fa con il cosiddetto metodo delle *prime e ultime ragioni* [11].

[10] Cfr. rispettivaemnte *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas* e *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*, Londini 1669 e 1671.

[11] La seconda edizione dei *Principia* è del 1713: *Philosophiae naturalis principia mathematica. Auctore Isaaco Newtono, equite aurato, Editio secunda auctior et emendatior*. L'anno successivo apparve l'edizione di Amsterdam, destinata a diffondersi sul continente europeo: *Philosophiae naturalis principia mathematica. Auctore Isaaco Newtono, equite aurato, Editio ultima auctior et emendatior*, Amstelaedami 1714. Per la verità la *dizione* contenuta nello scolio al lemma XI è presente anche nella prima edizione, quella del 1687, tuttavia sia per la maggiore attenzione che Newton pone al problema del *rigore* nella seconda edizione, sia perché il metodo delle *prime e ultime ragioni* è quasi sempre considerato dai ma-

Nel celebre scolio al Lemma XI egli precisa che le *ultime ragioni* (ultimi rapporti), per mezzo delle quali le quantità si annullano, non sono rapporti di ultime quantità, bensí limiti cui i rapporti delle quantità decrescenti si avvicinano illimitatamente.

La definizione implica due fatti fondamentali che, per la verità, Newton non enuncia mai esplicitamente ma che verranno enfatizzati da quei matematici interessati a recuperare questo aspetto della teoria newtoniana, primo fra tutti Colin MacLaurin.

In primo luogo, non essendo in gioco alcuna grandezza finita ma unicamente un moto di avvicinamento, si tratta solo di stabilire se il processo (e non una grandezza) obbedisce ai requisiti dell'assioma di Archimede e della proprietà di esaustione. In secondo luogo vengono tolti ai *momenti* tutti gli eventuali riferimenti ad effettive grandezze finite.

Tuttavia il problema non può essere esaurito completamente in questo modo. Newton si rende conto che l'impostazione costituisce, per cosí dire, una traduzione fondazionale di una procedura che, dal punto di vista della effettiva pratica matematica, ha utilizzato i *momenti* come altrettanti mezzi euristici per la scoperta del nuovo calcolo.

Quindi se la teoria dei limiti riesce a giustificare una situazione di omogeneità, lo fa unicamente togliendo ogni significato a nozioni che comunque hanno avuto una parte fondamentale proprio in quanto puri indivisibili.

Nello stesso scolio al Lemma XI, Newton tenta di giustificare la situazione basandosi su di una pura analogia.

Viene enunciato che gli *ultimi rapporti* non sono calcolati prima che le grandezze si annullino e non sono calcolati dopo che le grandezze si sono annullate bensí rappresenterebbero i rapporti mediante i quali le stesse grandezze si annullano.

Dove sta l'analogia?

Nella *Géomètrie* di Descartes viene fondata una situazione di omogeneità sul rapporto tra il *punto che genera* e la *retta generata*; quindi, sfruttando la potenzialità dei teoremi della teoria delle proporzioni, viene effettuata una completa riduzione delle grandezze ai loro fondamenti lineari ottenendo in ogni caso una situazione omogenea di comparabilità.

tematici posteriori a Newton nella versione della seconda edizione, in particolare dai matematici europei nell'edizione di Amsterdam, nel prosieguo del lavoro le citazioni verranno riferite al testo del 1714.

Il tutto, come abbiamo già detto, usando semplicemente la potenzialità deduttiva della stessa teoria delle proporzioni, quindi nel rispetto dell'assioma di Archimede e della proprietà di esaustione [12].

Newton ritiene che il problema degli *ultimi rapporti* non sia dissimile dal problema dei *primi rapporti* (già considerati nella *Géométrie*). Come il moto di generazione di una retta implica un rapporto iniziale, inteso come momento generativo, senza che si infranga il rigore euclideo-archimedeo, cosí un ipotetico moto di ritorno, tendente ad annullare la retta generata, dovrebbe implicare l'identificazione di una sorta di c o n t r o - r a p p o r t o mediante cui si annulla quello che è stato generato ed in maniera tale che il nuovo rapporto non si identifichi con nessuna posizione sulla retta né tanto meno con il rapporto generatore.

Quest'ultima situazione viene tradotta da Newton con le dizioni *non prima* e *non dopo*. Ma con ciò risulta implicita l'identificazione di una posizione che, nello stesso tempo, delimiti completamente il moto di progressivo ed illimitato avvicinamento ad un termine fisso pur senza identificarsi con lo stesso termine cui il moto si avvicina progressivamente.

Come si può notare la posizione in questo caso si scosta radicalmente dalla teoria dei limiti enunciata prima e presenta piuttosto forti analogie con la nozione di sezione dell'*analysis situs* leibniziana.

Non per nulla i due aspetti della giustificazione newtoniana saranno suscettibili di essere recuperati in prospettive differenti.

La teoria dei limiti, filtrata attraverso l'elaborazione fattane da Colin MacLaurin, costituirà, sul continente europeo, un punto di riferimento irrinunciabile circa il problema dei fondamenti. Cioè in quella prospettiva tendente a non spezzare la continuità del rigore.

La teoria degli ultimi rapporti, intesa come prospettiva di delimitazione e distinzione puramente relazionale, verrà utilizzata soprattutto sui problemi della continuità, generati dal dibattito sulle corde vibranti, e sarà considerata in blocco con l'*analysis situs* di Leibniz.

Infatti la metafisica matematica di Leibniz si propone l'obiettivo di giustificare la legittimità epistemologica di una p o s i z i o n e , in-

[12] R. Descartes, *La Géométrie*, in *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences ... Plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie*, Maire Leyden 1637.

dividuabile su di una retta, la cui funzione è quella di delimitare completamente una successione di *posizioni*, tendenti ad avvicinarsi illimitatamente ad un termine fisso, pur senza identificarsi con il termine stesso.

Che questo fatto richieda uno sforzo giustificativo è evidente: una eventuale sezione, in grado di tagliare una retta in modo da avere completamente alla sua sinistra una successione infinita di *posizioni* ed alla sua destra il *termine* cui dette posizioni tendono ad avvicinarsi illimitatamente, rappresenta una deroga al rigore euclideo-archimedeo. Non vengono rispettati l'assioma di Archimede e la proprietà di esaustione.

Del resto il problema era già rintracciabile nell'impostazione newtoniana. Sintantoché il metodo delle prime e ultime ragioni si traduceva in una teoria dei limiti, era possibile sostenere una continuità tra il rigore algebrico ed il rigore del nuovo calcolo. Ma nella misura in cui le ultime ragioni erano identificate con un rapporto, rappresentato dalla posizione collocata non prima e non dopo lo sparire delle grandezze, allora si aveva una situazione analoga alla nozione leibniziana di sezione: quella di delimitare completamente un moto illimitato di progressivo avvicinamento. E questo malgrado Newton ritenesse di essere vicino all'impostazione della *Géométrie* di Descartes, e di rispettare sia l'assioma di Archimede sia la proprietà di esaustione.

Analogamente a quanto abbiamo fatto per Newton vediamo, ora, di tracciare un rapido schema della metafisica leibniziana.

Leibniz ha una particolare concezione dell' a s t r a z i o n e intesa, da un certo punto di vista, come impoverimento. Su questa base costruisce e giustifica il senso di una nuova teoria degli *elementi semplici* e della *grandezza qualitativa* al cui interno deve essere ricondotta la stessa nozione di sezione.

Il punto di riferimento è costituito dal Libro v degli *Elementi* di Euclide, inteso come vera e propria teoria generale della grandezza.

Alla base della teoria delle proporzioni vi sarebbe uno schema intuitivo dell'infinito rappresentato da una successione di rapporti che tendono ad avvicinarsi illimitatamente ad un termine fisso. L'impostazione euclidea riesce a sottrarsi alle trappole dell'infinito riducendo il tutto ad un problema di logica formale. Ad esempio l'eventuale uguaglianza tra due termini viene accertata dimostrando che l'ipotetico infiltrarsi di uno di questi rapporti tra i due termini stessi (messi opportunamente su di una retta) provoca contraddizioni relativamente alle premesse mediante cui viene impostato lo stesso problema dell'uguaglianza (procedura di esaustione).

In questo caso verrebbe raggiunta una situazione di coerenza formale solo a prezzo di una fondamentale rinuncia: quella di delimitare concettualmente il moto di progressivo ed illimitato avvicinamento.

I vantaggi, ottenuti mediante il raggiungimento della coerenza formale, avrebbero come corrispettivo un impoverimento dei contenuti. Ed in questo senso i problemi, relativi al calcolo differenziale, imporrebbero di recuperare proprio quello che è andato perduto: l'identificazione di una posizione atta a delimitare completamente il moto di avvicinamento, pur senza che la posizione si identifichi con il termine cui detto avvicinamento si approssima illimitatamente.

Occorrerebbe, sempre secondo Leibniz, una nuova geometria, fondata su di una rete di elementi semplici, inediti rispetto agli *elementi* della geometria euclidea, ed il cui compito sarebbe quello di identificare delle pure posizioni spaziali non delle estensioni.

Dato che la nuova prospettiva non traduce estensioni ma semplici relazioni (posizioni spaziali) si avrebbero unicamente *grandezze qualitative* logicamente differenti dalle tradizionali *grandezze estensive* tipiche della geometria euclidea; come tali non sarebbero suscettibili di rientrare immediatamente nel rigore rappresentato dall'assioma di Archimede e dalla proprietà di esaustione.

Leibniz ritiene che la rottura del rigore, segnata dall'*Analysis situs*, possa permettere ugualmente un efficace collegamento con la tradizionale matematica dell'estensione. La gerarchia delle relazioni sarebbe costituita in modo tale che *ad un certo limite* (a seconda del grado di maggiore o minore complessità) corrisponderebbe ad estensioni. Quindi ad un certo limite i due paradigmi di rigore c o n v e r g e r e b b e r o .

Per la verità Leibniz non è sempre cosí esplicito. A questo proposito possiamo distinguere due gruppi di scritti: quelli piú propriamente teorici e quelli, per cosí dire, in risposta alle obiezioni di Nieuwentiit o comunque sotto l'influsso della cosiddetta polemica sul calcolo.

Fra i primi ricordiamo ovviamente quelli dedicati alla costruzione di una nuova geometria di posizione: *Characteristica geometrica; De Analysi situs; Speciem geometriae luciferae*; per terminare con il saggio *Initia rerum mathematicarum metaphysica* che costituisce una *summa* dei problemi fondazionali basati su principi di corrispondenza.

Fra i secondi la *Responsio a Dn. Bernardo Nieuwentijt*; la *Justi-*

fication ed il manoscritto *Cum prodiisset atque increbuisset* scritto in relazione ai paradossi obiettati da Nieuwentiit e mai pubblicato [13].

In questo secondo gruppo di scritti, Leibniz tende ad accentuare il fatto che il nuovo calcolo può essere considerato all'interno della prospettiva algebrica, ma lo fa presupponendo proprio quel principio di continuità che sta alla base della stessa geometria di posizione.

In sostanza Leibniz afferma che la sezione, in quanto posizione che delimita completamente una successione, può essere considerata, dal punto di vista relazionale, appartenente alla successione (rappresenta una posizione limite) ma, dal punto di vista dell'estensione, non essendovi alcun elemento della stessa successione che si infiltra tra la sezione ed il termine cui la successione tende ad avvicinarsi, sezione e termine risulterebbero indistinguibili.

Come si può facilmente notare questo modo di ragionare sull'uguaglianza equivale ad enunciare, anche se in maniera un po' diversa rispetto a prima, un analogo principio di corrispondenza: una distinzione, formulata da un punto di vista relazionale, tende ad un certo limite a coincidere con l'ordinaria uguaglianza algebrica (Euler, nelle *Institutiones*, userà le tesi del manoscritto *Cum prodiisset atque increbuisset...* per enunciare un analogo principio di corrispondenza basato sulla teoria delle proporzioni).

Leibniz però, in questa fase, ragiona come se la situazione non presentasse *tout court* alcun salto rispetto al rigore, enfatizzando il fatto che una corrispondenza ad un certo limite rappresenta *ipso facto* una corrispondenza su tutta la linea.

Ora vediamo di tracciare un rapido bilancio delle due impostazioni metafisiche, quella newtoniana e quella leibniziana, raggruppandone tre temi che saranno oggetto di recupero da parte dei matematici della seconda metà del settecento.

In primo luogo osserviamo che sia presso Newton sia presso Leib-

[13] Facendo riferimento ai *Leibnizens mathematische Schriften*, 7 voll., Berlin ed Halle 1849-62, ristampa Hildesheim 1961, i due gruppi di scritti esemplificativi delle due tendenze di Leibniz si trovano nei seguenti volumi: *Characteristica geometrica* e *De analysi situs*, vol. V; *Initia rerum mathematicarum metaphysica* e *Speciem geometriae luciferae*, vol. VII; *Responsio ad nonnullas difficultates a Dn. Bernardo Nieuwentijt circa Methodum differentialem notas*, vol. V; *Justification du calcul des infinitesimales per celui de l'algèbre ordinaire*, vol. IV; mentre il manoscritto *Cum prodiisset atque increbuisset analysis mea infinitesimalis* si trova in *Historia et origo Calculi differentialis*, già edito da Gerhardt, Hannover 1846, ora vol. V.

niz la geometria assume una caratteristica cruciale: nel primo caso dovrebbe rappresentare una disciplina che traduce globalmente le relazioni concrete del moto, nel secondo caso tratterebbesi di una *analysis situs* atta a tradurre concretamente il contesto relazionale che funge da base all'indagine matematica. Nell'un caso e nell'altro la nuova geometria assumerebbe l'aspetto di un fondamento concreto di cui la nuova analisi rappresenterebbe una b r a n c a costituita da uno specifico calcolo simbolico.

In secondo luogo si ha una differenziazione precisa delle due metafisiche rispetto al problema del rigore. Il metodo delle *prime ed ultime ragioni*, in quanto teoria dei limiti, evita di considerare posizioni o momenti e tratta esclusivamente di grandezze variabili; quindi prefigura una completa omogeneità tra l'algebra ed il nuovo calcolo facendo dell'assioma di Archimede e della proprietà di esaustione un semplice requisito in ragione del quale avvengono le variazioni. Leibniz al contrario pensa che la sua *analysis situs*, fondata sulla nozione di sezione, non abbia immediatamente a che fare con estensioni, quindi individui un campo di grandezze qualitative non immediatamente riconducibili al rigore classico. In questo caso la compatibilità tra il nuovo ed il vecchio calcolo risulterebbe affidata al verificarsi di una corrispondenza realizzabile unicamente ad un certo limite.

In terzo luogo abbiamo il presupposto fondamentale della metafisica leibniziana: l'astrazione, realizzata dal raggiungimento del rigore, è costretta comunque a perdere dei contenuti. Da questo punto di vista il nuovo calcolo simbolico dovrebbe risultare piú povero di contenuto rispetto all'*analysis situs*.

Se teniamo presente i tre filoni che abbiamo raggruppato possiamo tratteggiare brevemente le linee della loro differente diffusione sul continente europeo presso i matematici della seconda metà del settecento.

Colin MacLaurin, nel *Treatise of Fluxions* (1742), sotto l'influsso delle obiezioni formulate da Berkeley al *metodo delle flussioni* (*The Analyst* - 1734), presenta una versione rigorosa del metodo delle *prime e ultime ragioni* sviluppando due idee fondamentali già presenti nell'impostazione newtoniana [14].

[14] Circa le obiezioni di Berkeley al *metodo delle flussioni* di Newton ed ai *differenziali* di Leibniz cfr. G. Berkeley, *The Analist; or a Discourse addressed to an Infidel Mathematician*, London 1734.

Il testo di Mac Laurin, originariamente concepito come una risposta a Ber-

In primo luogo la geometria sintetica viene considerata il fondamento sicuro del nuovo calcolo.

In secondo luogo mediante una sorta di capovolgimento, operato relativamente al metodo di applicazione della *proprietà di esaustione*, viene garantita la possibilità di far rientrare la newtoniana *teoria dei limiti* nella stessa geometria, quindi nell'ambito del rigore classico.

I risultati raggiunti nel *Treatise*, dal punto di vista del rigore, sono notevoli: viene fondata una teoria dei limiti sul fatto che il moto di avvicinamento obbedisce al requisito classico di essere archimedeo, mentre i momenti non vengono ritenuti concetti scientifici a tutti gli effetti ma semplici modi di parlare; quindi l'intiera procedura viene intesa come il risultato di una geometria sintetica basata su pochi principi evidenti, all'interno del rigore euclideo-archimedeo.

Contrariamente a quanto alcune volte viene sostenuto, le tesi del *Treatise* ebbero una grossa diffusione sul continente.

D'Alembert le riprende quasi integralmente, soprattutto relativamente al modo di impiego della *proprietà di esaustione*, e le memorie di Karsten, Landerbek e L'Huilier (concorrenti al *Bando* del 1784) usano la teoria dei limiti, presenti nel *Treatise*, come punto fermo in relazione al problema dei fondamenti [15].

Occorre precisare, però, che il contesto culturale europeo si presenta alquanto differente rispetto all'ambiente anglosassone del 1742.

Come abbiamo già visto, lo sviluppo del dibattito sulle *corde vibranti* apre il problema del rapporto tra l'algoritmo formale ed il concreto cui lo stesso algoritmo si riferisce.

In tal senso la prospettiva relazionale, espressa dalla nuova geometria, viene considerata, quanto al suo contenuto, più estesa nei confronti del calcolo formale rappresentato dalla *serie di Taylor*.

Anche in quei casi in cui il riferimento alla geometria sintetica del

keley, cresce nelle mani dell'autore sino ad assumere le caratteristiche di una vera e propria teoria fondazionale: cfr. C. Mac Laurin, *A Treatise of Fluxions*, Edimburg 1742.

[15] W. J. G. Karsten, *Anfangsgründe der mathematische Analysis und höheren Geometrie, mit Rücksicht auf eine Preisfrage vom Mathematisch – Unendlichen (Des Lehrbegriffes der gesamten Mathematik zweyten Theils zweyte Abteilung)*, Greifswald 1786; M. N. Landerbeck, *Disputatio solutionem quaestionis cujusdam de maximis vel minimis exhibens*, Upsala 1800; S. L'Huilier, *Principuorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris ad normam dissertationis ab academia scient. reg. Prussica anno 1786. Premi honore decoratae elaborata auctore Simone L'Huilier*, Tubingen 1795.

Treatise risulta evidente, ne troviamo però mutato il senso epistemologico di fondo: la geometria non rappresenta soltanto il paradigma di rigore cui debbono essere ridotte le nuove procedure per ottenere l'evidenza degli antichi, ma rappresenta altresí la prospettiva relazionale del moto cosí come si presenta in concreto.

La stessa scuola di Pfleiderer, per molti aspetti vicina all'impostazione di MacLaurin, presenta la serie di Taylor come un algoritmo che deve essere riferito al campo concreto della geometria, con la convinzione che quest'ultimo ha la proprietà di tradurre globalmente la prospettiva relazionale del moto, mentre l'algoritmo ne rappresenta, per cosí dire, un punto di vista locale (cfr. a questo proposito *Theorematis tayloriani demonstratio* - 1789) [16].

Ma non basta. Uno dei problemi cruciali, ereditati sempre dal dibattito sulle corde vibranti, era costituito dalla necessità di definire geometricamente una nozione di continuità piú estesa rispetto alla nozione di continuità rappresentata dalla formalizzazione tramite la *serie di Taylor*: trattavasi di una continuità in grado, per cosí dire, di sopportare punti di discontinuità. Ebbene da questo punto di vista diventava necessario ragionare su *posizioni* e non su semplici *variazioni* cosí come prevedeva la *teoria dei limiti* sia nell'impostazione dei *Principia* sia nell'evoluzione presentata dal *Treatise*.

Avevamo avuto modo di vedere, in precedenza, che lo stesso Newton, nei *Principia*, propone una deroga alla sua teoria dei limiti, tentando sostanzialmente di rendere epistemologicamente ragione dell'uso pratico dei *momenti*, nel far ciò è costretto ad identificare una posizione determinata non prima e non dopo lo *sparire delle grandezze*. Mac Laurin, nel *Treatise*, propone una analoga deroga a proposito del poligono di infiniti lati; quest'ultimo non dovrebbe essere inteso come un cerchio, il che implicherebbe la completa soppressione della distinzione tra *ciò che è curvo* e *ciò che è retto*, ma piuttosto come un elemento la cui unica funzione sarebbe quella di rappresentare un semplice punto di riferimento ideale che permetta la distinzione tra la successione dei poligoni iscritti, ottenuti mediante la procedura di *raddoppiamento dei lati*, ed il cerchio stesso.

In questo senso, però, viene ammessa la possibilità di individuare, anche se in via ideale, una posizione atta a delimitare completamente la

[16] C. P. Pfleiderer, *Theorematis tayloriani demonstratio*, Tübingen 1789.

successione, separandola dal termine cui detta successione si approssima illimitatamente.

Evidentemente, giudicata da quest'ultimo punto di vista, la metafisica newtoniana viene trattata " in blocco " con la metafisica leibniziana, precisamente con la nozione leibniziana di *sezione* che rappresentava il concetto epistemologicamente piú adatto per rendere ragione del comportamento di quelle *funzioni* che presentavano atipicità nei confronti della nozione formale del *continuo*.

A partire dalla seconda metà del secolo la situazione è stranamente composita. Circa il problema dei fondamenti del nuovo calcolo, il riferimento classico è alla newtoniana teoria dei limiti, quindi esclusivamente alla nozione di grandezza variabile, al contrario circa il problema del campo delle relazioni che fungono da base concreta alla procedura differenziale, il riferimento preminente è alla nozione leibniziana di *sezione*, quindi all'*analysis situs* basata sulla nozione di grandezza qualitativa.

Il punto di vista della *variazione* ed il punto di vista della *posizione* finiscono in tal modo per coesistere, coprendo ambiti diversi, anche presso uno stesso autore.

Se prendiamo ad esempio l'opera principale di Kaestner sull'argomento, *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* (1761), troviamo che il rapporto differenziale (sempre espresso da Kaestner in notazione leibniziana) viene fondato sulla teoria dei limiti di Newton e MacLaurin, mentre per la nozione generale di continuità ed in genere per tutti quei casi in cui entra in gioco un punto di vista relazionale piú esteso rispetto al punto di vista della correlazione formale tra *derivazione, integrazione* e *continuità*, il ricorso è a una teoria generale della grandezza fondata sul concetto leibniziano di sezione [17].

In genere le riflessioni epistemologiche dei matematici dell'epoca si articolano sempre su tre livelli distinti, riepilogabili in questo modo.

Relativamente all'algoritmo formale, rappresentato dalla serie di Taylor, i nuovi concetti, sull'esempio dell'Euler del 1748, vengono giu-

[17] A questo proposito occorre confrontare due opere significative sull'argomento di A. G. Kaestner, che rappresentano due punti di vista epistemologicamente coesistenti sulla nozione di *grandezza*: Approccio tradizionale nel caso delle *grandezze finite* e doppia prospettiva basata rispettivamente sul concetto di *variazione* e di *qualità* relativamente al problema dell'infinito: *Anfangsgründe der Analysis endlicher Grossen*, Göttingen 1760 e *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*, ivi 1761.

stificati in relazione alla stessa logica seriale: la derivata è definita quale coefficiente del termine di primo grado della serie, l'integrazione quale operazione inversa della derivazione e cosí via.

Relativamente al contesto concreto, rappresentato formalmente dall'algoritmo, si fa ricorso alla teoria dei limiti, quindi alla nozione di variazione; in questo caso il punto di riferimento d'obbligo è rappresentato sia dai *Principia* sia dal *Treatise.*

Relativamente al campo di problemi che sfuggono all'algoritmo (identificati dal *dibattito sulle corde vibranti*) il ricorso è all'*Analysis situs*, intesa come rappresentazione globale del *concreto relazionale.* Qui il riferimento è alla teoria leibniziana degli elementi semplici (*limite, sezione, traccia*, ecc.) che costituisce la base della *geometria di posizione.* L'assunto che fa da sfondo è costituito sempre dalla teoria leibniziana dell'astrazione che, in questo caso, viene applicata al nuovo contesto; la generalizzazione simbolica, trattasi dell'algoritmo rappresentato dalla serie di Taylor, raggiunge il rigore ma perde dei contenuti nei confronti del suo contesto relazionale concreto, cioè nei confronti dell'*Analysis situs.*

Quali sono i riflessi di una situazione cosí variegata? Oltre all'impostazione, per cosí dire assiomatica, relativa al calcolo formale, ed alla fondazione del concetto di *funzione derivata* sulla prospettiva geometrica del moto, quindi sostanzialmente sulla teoria dei limiti (tutte le *memorie* concorrenti al Bando del 1784 tengono conto dei due punti di vista), si sviluppa una vera e propria teoria generale della grandezza che dovrebbe rappresentare il *concreto* della matematica.

In quest'ultimo caso il programma è quello di dilatare la prospettiva segnata dal Libro V degli *Elementi*, considerato il paradigma classico per una teoria della grandezza, da una prospettiva semplicemente basata sull'estensione ad una prospettiva di tipo relazionale, cioè ad una *Analysis situs* fondata sul presupposto relazionale tipico: quello di sezione. Il tutto articolando *principi di corrispondenza* tra le due prospettive: quella estensiva e quella relazionale.

In questo senso, se seguiamo le impostazioni date da Euler, Kaestner e Lambert, abbiamo la possibilità di verificare il complesso articolarsi di una *metafisica concreta* completamente ispirata alla metafisica di Leibniz.

Quello che presenta di peculiare la prospettiva è che, unitamente alla teoria leibniziana, viene riconsiderato il senso epistemologico delle vecchie obiezioni di Nieuventijt, condotte nei confronti del concetto di *sezione* cosí come era stato formulato da Leibniz, e su questa base vengono isolati dei veri e propri paradossi della conoscenza che costituivano all'epoca un vero e proprio enigma epistemologico.

Le intenzioni di Nieuventijt, in origine, erano dirette a colpire il rigore del *nuovo calcolo*, basato sul *tralasciamento* dei differenziali di ordine superiore.

Nelle *Considerationes* (1694) viene sostenuta l'illegittimità formale di considerare simboli quali *dx* come entità a pieno diritto operative nel *calcolo* e nello stesso tempo tralasciare ad esempio i prodotti *dx. dy* senza considerarli *zero* [18].

Leibniz replica sugli Acta Eruditorum con la celebre *Responsio*, ma Nieuwentijt, non ritenendosi soddisfatto, torna sul problema con le sue Considerationes secundae ... (1696); qui formula due paradossi imputabili alla metodologia del *tralasciamento.*

Partendo dall'equazione di un'*iperbole* e dall'equazione di una *parabola*, egli mostra come, all'interno della logica del tralasciamento, si possono tranquillamente trasformare le equazioni di partenza in equazioni di *rette.*

La replica di Jakob Hermann in difesa di Leibniz, *Responsio ad Clarissimi Viri Bernh. Nieuwentijt* (1700) continua a vertere sul problema del rigore del calcolo, tuttavia i due paradossi di Nieuwentijt implicano strettamente un terzo paradosso, questa volta di tipo epistemologico. La trasformazione della parabola o dell'iperbole in una retta implicherebbe un completo processo di vanificazione del concreto che dimostrerebbe la completa infondatezza della nuova metodologia.

Per la verità Leibniz coglie appieno questo aspetto, anche se non risponde direttamente a Nieuwentijt sull'argomento, e molti anni piú tardi in una lettera a Dangicourt (1716) si limita a ribadire l'utilità scientifica della procedura senza per altro entrare nel merito della sua possibile giustificazione sulla base di una logica tipo genere-specie [19].

[18] Nieuwentijt effettua i suoi rilievi critici al calcolo differenziale di Leibniz in due riprese: *Considerationes circa Analyseos ad quantitates infinité parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis*, Amstelaedami 1694; e *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia et responsio ad Virum Nobilissimum G. W. Leibnitium*, Amstelaedami 1696. Alle *Considerationes secundae* Leibniz non replicò, replicò invece Jacob Hermann, *Responsio ad Clarissimi Viri Bernh. Nieuwentijt Considerationes Secundas Circa Calculi differentialis principia Editas*, Basileae 1700.

[19] Cfr. in *Gothofredi Guillelmi Leibnitii, Opera Omnia*, Genevae 1768, t. III, pp. 499-502.

Ovviamente, nella seconda metà del settecento, il panorama culturale risulta alquanto mutato rispetto al periodo della cosiddetta *polemica sul calcolo.* La comparsa dell'*Introductio* che, come abbiamo già visto, aveva provveduto a fondare assiomaticamente il calcolo sulla logica seriale e conseguentemente l'uso consolidato, presso i matematici, della serie di Taylor avevano svuotato di efficacia i paradossi formulati da Nieuwentijt circa il problema del tralasciamento.

Tuttavia il problema del concreto, aperto dal dibattito sulle corde vibranti e conseguentemente il recupero della metafisica geometrica, basata sulla nozione di sezione, avevano improvvisamente reso di attualità il paradosso epistemologico di Nieuwentijt.

Infatti i cosiddetti elementi semplici, cui apparteneva la stessa nozione di sezione, che avrebbero dovuto rappresentare i fondamenti ultimi del concreto relazionale, sussistevano proprio in ragione di un processo di soppressione del concreto.

Già le metodologie basate sul *raddoppiamento della secante* avevano posto in evidenza questo fatto cruciale. La successione, costituita dai punti sulla circonferenza ottenuti per *raddoppiamento*, tendente ad approssimarsi al punto estremo della stessa corda, è delimitabile tracciando appunto una sezione che ha la prerogativa di sopprimere la possibilità di distinguere corda, circonferenza e tangente (la situazione è analoga alla soppressione dell'iperbole e della parabola evidenziata dal paradosso epistemologico di Nieuwentijt).

Tuttavia era proprio in virtú di questo processo che risultava possibile trattare unitariamente oggetti di per sé non assimilabili.

Il paradosso si riproponeva in relazione al fatto di dover ricorrere ad un punto di vista esterno che non era rappresentato da alcun attributo degli oggetti concreti, quindi non era giustificabile da alcuna procedura logica tipo genere-specie.

Nei confronti di questo problema possiamo rintracciare una serie variegata di risposte che tuttavia presentano un elemento comune. Infatti, nella maggior parte dei casi, lo sforzo è diretto ad evidenziare l'aspetto, per cosí dire, virtuoso della procedura, indipendentemente dai quadri concettuali imposti alla scienza da una prospettiva sostanzialmente esterna ad essa.

Da quest'ultimo punto di vista la procedura di soppressione non si tradurrebbe affatto in un vuoto annientamento, in uno zero assoluto, ma avrebbe la prerogativa di evidenziare l'aspetto relazionale del concreto, prescindendo appunto da quella *immediatezza* prerogativa del suo aspetto estensivo.

Si tratterebbe di far emergere un concreto più concreto del precedente e questo sarebbe sufficiente per confermare la stringenza empirica dell'intiera procedura, indipendentemente dalla possibilità o meno di fornirne la giustificazione ricorrendo ad una logica che fa dell'estensione dei corpi il suo punto di riferimento esclusivo.

Spostare i canoni dell'empiria dalla prospettiva estensiva a quella relazionale significa sostanzialmente accettare, come un fatto virtuoso, il paradosso epistemologico di Nieuwentijt, e nello stesso tempo significa saldare l'epistemologia matematica a quella della meccanica: il problema della sezione e l'aspetto relazionale della grandezza non risulterebbero dissimili dal problema dello spazio assoluto e della posizione, cosí come si presentano nelle scienze fisiche della natura.

Euler è il primo a rilevare che concetti quali quelli di *sezione, grandezza, posizione* sono suscettibili di rientrare in una comune impostazione epistemologica.

Prima nelle *Réflexions* poi nelle stesse *Institutiones*, quindi nella *Theoria motus corporum* viene sostenuta la legittimità del ricorso ad un punto di vista esterno che sopprima *in toto* le determinazioni estensive degli oggetti [20].

Lo stesso Lambert, pur nella sua impostazione filosofica sostanzialmente diversa, concorda sulla positivizzazione virtuosa del paradosso di Nieuwentijt. Prima nei *Beiträge*, poi nella *Anlage zur Architektonik*, gli elementi semplici sono considerati il risultato di un processo rappresentativo che, pur derivando dal concreto dell'esperienza, ha la prerogativa di prescindere dalla sua immediatezza con lo scopo di evidenziarne i fondamenti relazionali. *I concetti* di *sezione* e di *indivisibile*, ad esempio, sono fatti rientrare a pieno diritto in questo ambito [21].

[20] Euler formula una *teoria della posizione* completamente controfattuale.
Nelle *Réflexions ...*, cit. e nella *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita*, Rostok - Greifswald 1765, relativamente alla *meccanica*; nelle *Institutiones calculi differentialis*, Impensis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 1755, relativamente all'*Analysis situs* ed alla sua *corrispondenza* con le grandezze classiche.

[21] A questo proposito sono importanti rispettivamente il *Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Idtthum und Schein*, 2 voll., Leipzig 1764, soprattutto le parti relative alla *Dianoilogie*; i *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik*, Berlin 1765; il saggio *De universaliori calculi idea disquisitio, una cum adnexo specimine*, « Nova

Ma è soprattutto nell'ambiente scientifico di Göttingen che si realizza la piena autonomizzazione della scienza dai vincoli epistemologici di una logica tipo genere-specie.

Gli sviluppi dell'elettromagnetismo, della medicina, dell'antropologia fisica e della chimica alla « Georg-August-Universität » avevano imposto quadri epistemologici elastici e funzionalmente adeguati alla scoperta scientifica piú che a canoni precostituiti.

D'altronde il punto di vista relazionale si era affermato anche nelle nuove discipline e ciò aveva determinato un ambiente culturale aperto. In genere non venivano ravvisate difficoltà dissimili in concetti antropologici, quali il *nisus formativus* o l'*infinitamente piccolo* della matematica o lo *spazio assoluto* della meccanica. In tutti i casi, infatti, il nocciolo della questione consisteva nel prescindere dalla concretezza, rappresentata dagli attributi dei corpi. Era il caso che, presso Nieuwentijt, presupponeva la situazione scandalosamente paradossale dell'indistinguibilità tra *retto* e *curvo* [22].

In questo contesto Kaestner sostiene che l'approccio relazionale alla grandezza non risulta affatto subordinato alla possibilità immediata di conservare inalterate le distinzioni, infatti la sua funzione consisterebbe piuttosto nel creare una efficace alternativa all'estensione che permetta di indagare il campo concreto delle relazioni [23].

Se, a questo punto, diamo un breve sguardo retrospettivo a quanto siam venuti dicendo, non avremo alcuna difficoltà ad accorgerci di un fatto assai importante.

Il problema del concreto, caratterizzato mediante una sua autonomia nei confronti dell'algoritmo formale, implica il tentativo di codificare una logica relazionale alternativa alla tradizionale logica tipo genere-specie.

La nuova geometria (*Analysis situs*) era appunto considerata la logica delle relazioni per eccellenza e come tale destinata a rappresentare

Acta Eruditorum », Leipzig 1765; ed *Anlage zur Architektomik oder Theorie des Einfachen und des Ersten in philosophischen und mathematischen Erkenntnis*, 2 voll., Riga 1771.

[22] Cfr. J. F. Blumenbach, *De generis humani varietate nativa*, Göttingen 1776 (vi furono altre due edizioni nel 1781 e 1795) ed il saggio *Ueber den Bildungstrieb* apparso sul « Gottingisches Magazin der Wissenschaften und Literatur » (1780), pp. 247 ss.

[23] Oltre agli *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*, cit. occorre ricordare le *Dissertationes Mathematicae et Physicae*, Altenburgi 1771.

un c o n c r e t o scientificamente piú significativo del c o n c r e t o i m m e d i a t o , legato quest'ultimo all'estensione.

Lungo questa direzione programmatica le reazioni al paradosso epistemologico di Nieuwentijt avevano come corrispettivo quello di puntualizzare ciò che oggi chiameremmo l'aspetto controfattuale della scienza.

Gli sviluppi di questa prospettiva, ed i relativi dibattiti, finiscono per rappresentare uno degli aspetti piú affascinanti e piú densi di conseguenze storiche dell'epistemologia matematica della seconda metà del settecento. E questo se si tiene presente oltretutto il suo notevole impatto con la filosofia.

CAPITOLO I

LA METAFISICA MATEMATICA DI LEIBNIZ E LE " OBIEZIONI " DI NIEUWENTIJT

1.1. *Il periodo di Parigi e la scoperta del nuovo calcolo.*

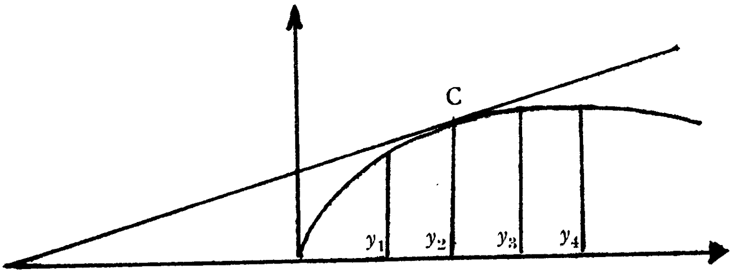
Negli anni del soggiorno parigino di Leibniz indubbiamente il 1675 fu un anno cruciale. Cinque manoscritti datati rispettivamente 25, 26 e 29 ottobre, 1 e 11 novembre 1675, conservati nell'archivio di Hannover, ci permettono di ricostruire il senso epistemologico della scoperta del nuovo calcolo [1].

Il perno centrale della riflessione leibniziana consiste nel collegare la differenziazione e l'integrazione come operazioni inverse l'una dell'altra; in questo contesto Leibniz usa, per la prima volta, la nozione di sezione come schema geometrico-intuitivo per operare il collegamento.

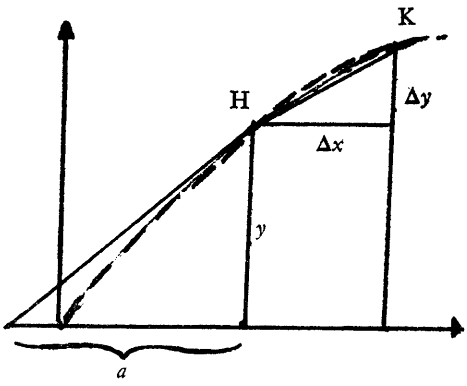
L'idea fondamentale che sta alla base del cosiddetto *teorema dell'inversione* può essere schematizzata in questo modo: se tracciamo una sequenza di *ordinate* la cui distanza l'una dall'altra sia convenzionalmente unitaria, allora la somma delle ordinate y dà approssimativa-

[1] Nell'archivio di Hannover vi è un gruppo di manoscritti matematici del 1675 (periodo di Parigi) che ci permettono di capire con precisione non solo i criteri intuitivi della scoperta di Leibniz, ma altresí come Leibniz stesso intendesse fondare il rigore del nuovo calcolo. Detti manoscritti risultano tradotti in inglese in J. M. Child, *The early mathematical manuscripts of Leibniz*, Open Court, London e Chicago 1920. Un'analisi accurata la troviamo in J. E. Hofmann, *Die Entwicklungsgeschichte der leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672-76)*, Leibniz Verlag, München 1949. Su questo argomento cfr. ancora H. J. M. Bos, *Newton, Leibniz, and the Leibnizian Tradition*, in Grattan - Guinness, *From Calculus to set theory*, Duckwort, London 1980, pp. 49-93.

mente l'area della curva, mentre la differenza di due y dà approssimativamente l'inclinazione della tangente nel punto C (presi opportunamente i due y). Ovviamente, conclude il ragionamento di Leibniz, se l'unità di misura fosse considerata intuitivamente infinitesima, si otterrebbe la misura esatta dell'area della curva e dell'inclinazione della tangente.

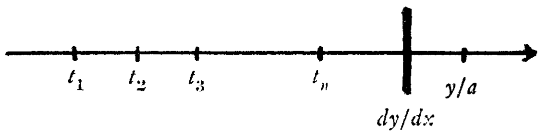


Come riesce questo schema intuitivo a risultare rigorosamente fondato? Di fatto Leibniz si serve della definizione di ***uguaglianza*** relativa alla teoria eudossiana delle proporzioni. Infatti, tenendo presente la falsariga del ragionamento precedente e tenendo presente la figura qui indi-



cata, abbiamo che $\Delta y/\Delta x$ rappresenta l'inclinazione della secante HK che a sua volta rappresenta un'approssimazione dell'inclinazione della tangente in H. Se ora immaginiamo di fare ruotare la secante HK relativamente al punto H, questa tenderà ad assumere una p o s i z i o n e l i m i t e che si identificherà con la stessa tangente in H alla curva. Dato che sappiamo dalla geometria che l'inclinazione della tangente è rappresentata da y/a (a è la *sottotangente*) allora la rotazione della secante

HK determinerà una successione infinita di rapporti i cui valori tendono progressivamente ad avvicinarsi al coefficiente angolare della tangente y/a. A questo punto se ipotizziamo di tracciare una sorta di sezione relativamente alla successione infinita e la denotiamo con dy/dx, in



modo tale che tutti i valori della successione risultino approssimati per difetto rispetto a dy/dx, ci troviamo nella classica situazione che determina la definizione dell'uguaglianza all'interno della teoria delle proporzioni, cioè all'interno dei canoni classici del rigore matematico. Infatti l'esistenza della sezione dy/dx è assicurata dal seguente fatto: il rapporto dy/dx rappresenta un valore ben determinato (trattasi del coefficiente angolare della tangente alla curva), infatti nessun termine intermedio si infiltra tra dy/dx e y/a.

Ciò posto è immediata la relazione di proporzionalità

$$dy : dx = y : a$$

dove rientrano singolarmente i differenziali dy e dx. D'altronde, come abbiamo visto, Leibniz riteneva che la stessa logica della teoria delle proporzioni garantisse in maniera ferrea che dy/dx dovesse rappresentare un rapporto a tutti gli effetti, quindi fosse subordinato alle regole della proporzionalità in genere. Leibniz ritiene parimenti che gli eventuali paradossi, derivanti dall'attribuire al simbolo differenziale dx il significato di rappresentare direttamente una grandezza infinitesima, potessero essere evitati facendo valere lo stesso spirito eudossiano-euclideo relativo al problema degli incommensurabili.

È noto che la teoria delle proporzioni viene formulata da Eudosso per ovviare alla situazione di indecidibilità, segnata, nella scienza greca, dalla scoperta delle grandezze incommensurabili. La tecnica era quella di prescindere da ogni possibile rappresentabilità lineare in termini aritmetici ed invece far dipendere il significato delle grandezze (commensurabili o no) dall'intelaiatura di rapporti che le definiscono implicitamente.

Onde per cui si può enunciare direttamente la definizione generale di proporzione: due grandezze A e B sono nello stesso rapporto di altre due grandezze C e D, quando, presi due numeri interi qualunque m e n, considerati rispettivamente mA e nB da un lato e mC e nD dall'altro lato, a seconda che si abbia $mA \gtreqless nB$ si avrà corrispondentemente $mC \gtreqless nP$ (in modo che il segno *maggiore* corrisponda al segno *maggiore*, l'*uguale* all'*uguale*, etc.). E questo indipendentemente dalla possibilità o meno di rappresentare in termini geometrico-aritmetici le grandezze stesse [2].

In sostanza A, B, C e D risultano implicitamente definiti dai rapporti in cui sono suscettibili di rientrare. È un po' quello che avviene nelle moderne teorie assiomatiche in cui vi sono termini primitivi dal cui significato si prescinde totalmente e che risultano, in un secondo tempo, implicitamente definiti dagli assiomi in cui rientrano.

Leibniz pensa che il suo caso possa rientrare in questo schema eudossiano: dato che dy e dx sono simboli che rientrano in un ben preciso rapporto (trattasi della derivata dy/dx) e questo rapporto esiste (risulta fondato sulla stessa logica della teoria delle proporzioni) allora sia dy che dx risulterebbero rigorosamente definiti (implicitamente definiti) dalla sintassi logica che regola il comportamento di rapporti di tal fatta. Non a caso Leibniz stesso nella *Nova methodus* ci fornisce, in una forma che potremmo definire assiomatica, le regole della differenziazione [3].

Questo tipo di impostazione fondazionale ammette che all'interno della matematica si possano trovare sia rapporti espressi da grandezze archimedee, tipo y/a, sia rapporti tipo dy/dx, il cui numeratore e denominatore sono costituiti da simboli (quali sono i differenziali) che hanno esclusivamente la funzione di rendere operativi i nuovi rapporti all'interno della loro sintassi specifica [4].

[2] Ne *Gli elementi di Euclide* quanto abbiamo esposto costituisce la *definizione cinque* del libro V che ha appunto la funzione di sintetizzare la teoria eudossiana.

[3] L'articolo di Leibniz è costituito da un conciso resoconto di sei pagine pubblicate nel 1684 sugli *Acta Eruditorum* (periodico matematico fondato dallo stesso Leibniz nel 1682). Dello stesso articolo è disponibile una traduzione italiana in G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Bologna 1938, nuova edizione Milano 1962, pp. 163-174. La dizione esatta dell'articolo è *Nova Methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus*, nei *Leibnizschen mathematische Schriften*, 7 voll., Berlin ed Halle 1849 e 1862, rist. Hildesheim 1961, vol. V, pp. 220-226.

[4] Ne *Gli elementi di Euclide* il cosiddetto postulato di Archimede è rappresentato dalla *definizione quattro* del Libro V. Prescrive che, data una qualsiasi grandezza, sia sempre possibile trovarne una maggiore. In realtà il postulato è attribuibile ad Eudosso ed afferma letteralmente che date due grandezze disuguali è sempre possibile trovare un multiplo della minore tale che superi la maggiore. Dire

Leibniz fornisce, nove anni dopo la scoperta parigina, un criterio di traduzione dei differenziali nell'ambito del rigore dell'algebra.

La situazione può essere riepilogata in questo modo: Data l'esistenza dell'uguaglianza $y/a = dy/dx$, fissato un segmento finito dx, allora il problema consiste nel determinare la quarta grandezza dy.

Il che, ovviamente, si riduce al problema di determinare la quarta proporzionale [5].

Come si può immediatamente notare questo tipo di interpretazione algebrica non riflette affatto la procedura di differenziazione.

Quest'ultima infatti serve proprio per trovare il coefficiente angolare della tangente ad una curva qualsiasi. In sostanza non è possibile considerare noti rispettivamente y, a, dx e considerare dy come il segmento da determinare. Operando in questo modo è come se si conferisse un ambito di significato, per cosí dire estraneo, alla concreta procedura della differenziazione.

È proprio questo tipo di *impasse* che impone a Leibniz di focalizzare la propria attenzione sul problema della c o r r i s p o n d e n z a tra i vecchi canoni algebrici e la nuova teoria.

L'intento di Leibniz è quello di costruire una Metafisica, che in certo qual modo riesca a riepilogare i problemi concreti che stanno alla base dei due differenti punti di vista.

1.2. *La Metafisica come Logica delle Relazioni.*

Come abbiamo avuto modo di vedere, il concetto epistemologicamente cruciale della scoperta leibniziana era rappresentato dalla nozione di sezione.

Il quesito che si presentava a Leibniz era il seguente: quale valore occorre attribuire alla nozione di sezione relativamente alla proprietà di esaustione?

che una grandezza ha il requisito di essere *archimedea*, nella tradizione matematica, equivale ad affermare che deve obbedire al *postulato di Eudosso* ed alla *proprietà di esaustione*. Ne *Gli elementi di Euclide* quest'ultima costituisce la *proposizione uno* del Libro X e prescrive che data una qualsiasi grandezza è sempre possibile trovarne una minore. Ovviamente Leibniz si rendeva conto che i *differenziali* non potevano rispettare i due requisiti insieme.

[5] A questo proposito cfr. *Nova Methodus, Mathematische Schriften*, cit., vol. V, pp. 222 ss.

Se noi diamo un breve sguardo ai criteri intuitivi su cui si regge la teoria delle proporzioni non avremo alcuna difficoltà a riconoscere un vero e proprio schema dell'infinito.

Come abbiamo già visto, l'aspetto cruciale dello schema consiste nell'immaginare intuitivamente un determinato rapporto A/B (costituito da grandezze qualsiasi, siano esse commensurabili o meno) come il termine cui una successione infinita di valori (detti valori sono rappresentati da rapporti razionali, tipo n/m) si avvicina illimitatamente. Se noi denotiamo con T_1, T_2 ... T_n ... la successione di rapporti razionali, potremmo dire di possedere uno schema efficace per rappresentare intuitivamente il valore concettuale di A/B. Trattasi, per cosí dire, di una visione globalistica circa la struttura costitutiva di qualsiasi rapporto, intendendo quest'ultimo come il risultato di un processo di progressivo e infinito avvicinamento.

Nella misura in cui ci si pone il problema di costruire una teoria rigorosa, occorre che si proceda a restringere il punto di vista globale dello schema intuitivo, quindi, mediante l'assunzione di precise condizioni logiche, si procede a ridurre il tutto ad un punto di vista locale.

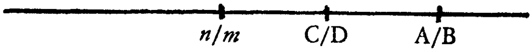
In questa prospettiva, come abbiamo già visto, Euclide enuncia la celebre definizione di *Proporzione* (in realtà la definizione è attribuibile ad Eudosso).

Date quattro grandezze A, B, C, D, queste si trovano in proporzione allorché, presi due *interi* qualunque m e n, se risulta $m\mathrm{A} \gtreqless n\mathrm{B}$, risulterà anche $m\mathrm{C} \gtreqless n\mathrm{B}$ (dato che questo vale per qualsiasi valore degli interi m e n, la condizione di proporzionalità vale per infiniti valori).

Su questa base si può procedere a definire, come fa Euclide, le condizioni in ragione delle quali si ha $\mathrm{A/B} > \mathrm{C/D}$. Infatti quest'ultimo caso si verifica quando, presi sempre due *interi* qualsiasi m e n si ha $m\mathrm{A} > n\mathrm{B}$ e contemporaneamente $m\mathrm{C} < n\mathrm{D}$ (cioè quando si ha discordanza di segno). Il che equivale a postulare le seguenti condizioni logiche per la *disuguaglianza*: $\mathrm{A/B} > n/m$ e $\mathrm{C/D} < n/m$.

Per meglio dire: l'esistenza di una grandezza razionale n/m, nello stesso tempo approssimata per difetto rispetto ad A/B e per eccesso (o uguale) rispetto a C/D, rappresenta la condizione logica della disuguaglianza.

Si può parimenti procedere a definire le condizioni in virtú delle quali si ha $\mathrm{A/B} = \mathrm{C/D}$. Infatti, presi sempre due *interi* qualsiasi m e n, quest'ultimo caso si ha quando ad esempio $mA > nB$ e contemporaneamente $mC > nD$ (detto piú in generale: quando si ha concordanza di segno). Il che equivale sempre a postulare le seguenti condizioni logiche per l'uguaglianza: $A/B \gtreqless n/m$ e $C/D \gtreqless n/m$ (essendo i segni presi uguali a due a due). Nel caso il segno in questione sia quello di maggiore, abbiamo che n/m deve risultare tanto approssimato per difetto rispetto ad A/B quanto rispetto a C/D.



A questo punto, però, si pone un problema strettamente connesso con lo schema dell'infinito su cui porta il rigore della teoria.

Dato che i rapporti tipo n/m sono infiniti (dovrebbero costituire una successione di valori che si avvicina illimitatamente tanto a C/D quanto ad A/B) allora le operazioni per verificare effettivamente l'uguaglianza dovrebbero parimenti essere infinite. Si dovrebbero scegliere infiniti rapporti tipo n/m e verificare che ognuno si trovi effettivamente tanto alla sinistra di C/D quanto di A/B. A rigore l'operazione di verifica non potrebbe mai essere terminata.

Si può ovviare alla situazione riducendo il tutto ad un problema di logica formale: ad esempio dimostrando che l'infiltrarsi di un ipotetico termine della successione di valori approssimati per difetto $T_1, T_2, T_3, \dots T_n, \dots$ fra C/D e A/B implica una contraddizione logica (ad esempio contraddice eventuali assunzioni iniziali). In tal modo, mediante un metodo logico formale di *reductio ad absurdum*, ci si sottrae all'operazione, prolungabile illimitatamente, di computare tutti i termini della successione [6].

In sostanza Euclide, sulla base di una intelaiatura di condizioni logiche rigorose, riesce a restringere il campo (ed il contenuto) della rappresentazione intuitiva, eludendo con questo gli equivoci e le trappole dell'infinito. Su questa base riesce a costruire un intiero edificio di teoremi di impareggiabile precisione logica, ma a prezzo di una fondamentale rinuncia: occorre rinunciare ad assegnare direttamente un'effettiva delimitazione alla *successione*. Piú precisamente occorre che si rinunci a circoscriverne il valore concettuale.

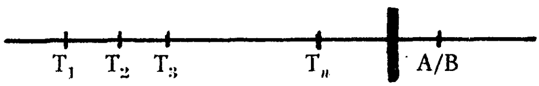
[6] Ne *Gli elementi di Euclide* le basi della teoria di esaustione sono costituite rispettivamente dalle *definizioni quattro* e *cinque* del Libro V e dalla *proposizione uno* del Libro X.

In sostanza per raggiungere una situazione che permetta di ottenere un aumento di contenuto, per cosí dire, in profondità, bisogna rinunciare a qualcosa, perdendo inevitabilmente parte del contenuto intuitivo.

Il problema della metafisica leibniziana prende appunto l'avvio da quest'ultimo punto. In una certa misura occorre rendere ragione di quel contenuto cui il rigore eudossiano-euclideo ha dovuto rinunciare.

Sono i quesiti impellenti, posti dal calcolo differenziale, a richiederlo. Infatti l'aspetto peculiare della nuova teoria è rappresentato dall'esistenza di una relazione funzionale, intercorrente tra due successioni infinite di valori, calcolata, ai limiti estremi delle successioni stesse.

Se noi teniamo presente lo schema intuitivo di Euclide, detto limite estremo dovrebbe essere rappresentato, nelle intenzioni di Leibniz, dalla sezione logica, tracciata tra A/B e la *successione*, in modo tale da non coincidere con A/B (in quanto ovviamente A/B non appartiene alla successione) [7].



Occorre ricordare che l'introduzione di un valore concettuale, quale è rappresentato dalla sezione, evidentemente non si accorda con il rigore della teoria delle proporzioni. Infatti detta sezione rappresenta pur sempre un termine che delimita in qualche modo una successione infinita, onde per cui, se interpretato letteralisticamente, mette capo a paradossi.

La ragione è da ricercarsi nel peculiare modo storico di formalizzare la grandezza presso i greci. Questi ultimi ritenevano che le grandezze fossero aumentabili all'infinito in ragione del *continuum* enunciato dal postulato detto di Archimede (in realtà attribuibile ad Eudosso). In questo senso l'infinito è inteso come qualcosa di smisurato, ed in genere come qualcosa non suscettibile di rientrare nell'indagine scientifica. Per questi motivi, proprio in virtú del postulato di Archimede, non risulta possibile concepire una successione infinita (quindi potenzialmente orientata verso lo smisurato) che nello stesso tempo risulti deli-

[7] Che A/B non possa appartenere alla *successione* è evidente: in primo luogo in quanto A/B rappresenta un *rapporto* di due grandezze qualsiasi, al contrario i valori della *successione* sono rappresentati da *rapporti razionali*. In secondo luogo, se A/B fosse il termine ultimo della *successione*, questa non sarebbe infinita.

mitabile alla sinistra della sezione tracciata nel modo illustrato in figura [8].

Leibniz ritiene che il problema non faccia altro che mettere in evidenza il fulcro centrale su cui porta l'intiera prospettiva del calcolo differenziale.

La formalizzazione euclidea (indirizzata ad una prospettiva estensiva) perde completamente quel contenuto intuitivo la cui peculiarità è costituita dalla relazione. Ragione per cui il valore logico della sezione deve essere contestualizzato in una prospettiva relazionale e non può essere giudicato estensionalmente.

Questo significa, secondo Leibniz, che l'approccio matematico non può esaurirsi esclusivamente all'impostazione classica ma altresí deve configurarsi come un calcolo di posizioni.

Che quest'ultimo sia un fatto cruciale per la matematica è dimostrato dagli stessi problemi fisici del moto. Ad esempio una variazione continua della direzione del movimento implica l'esigenza teorica della misurazione di detta variazione in un dato istante, cioè relativamente ad una sezione tracciata sulla traiettoria del movimento stesso. In questo caso il calcolo interesserebbe esclusivamente posizioni nello spazio e relazioni tra posizioni. Tutte prospettive che — a detta di Leibniz — non sarebbero immediatamente riducibili ad estensioni, al piú lo potrebbero essere mediatamente.

Affinché le teorie matematiche rientranti in questa prospettiva risultino legittimate, occorre costruire loro una solida base logica che, per cosí dire, fondi il significato dei nuovi apparati simbolici.

[8] Per chiarificare quest'ultimo punto occorrono delle precisazioni. Il rigore della *teoria delle proposizioni* si regge in primo luogo sul *Postulato d'Archimede* (fissata una grandezza qualsiasi è sempre possibile inferire l'esistenza di una piú grande), in secondo luogo sulla cosiddetta *Proprietà di esaustione* (fissata una grandezza comunque piccola è sempre possibile inferire l'esistenza di un'altra ancor piú piccola). In questo contesto formale noi dobbiamo considerare una successione infinita di valori tutti alla sinistra della sezione che ne costituisce il limite estremo, ma, dato che si tratta di una successione infinita di valori, in virtú del *Postulato di Archimede,* dovrà essere possibile raggiungere valori della successione alla destra della sezione. Ciò risulta contraddittorio con l'assunzione iniziale.

Si potrebbe obiettare che, in virtú della *Proprietà di Esaustione*, gli aumenti della successione possono essere resi intuitivamente sempre piú piccoli sino ad arrivare ad aumenti inapprezzabili. Ma anche in questo caso ci si imbatte in un evidente paradosso: se il valore di una grandezza risulta inapprezzabile, salta la stessa *Proprietà di Esaustione* che prevede appunto il contrario. È evidente che, da questo punto di vista, il rigore della teoria delle proporzioni si rivela incapace di rendere ragione del paradigma intuitivo, di tipo globalistico, che pure sta alla sua base.

Cosí come Euclide parte da *elementi semplici* (descritti tramite le definizioni), quindi li collega (formulando dei postulati), allo stesso modo si potrebbe procedere per imbrigliare in una rete logica i problemi fisici del moto.

Interpretando (intuitivamente) il movimento come una relazione sussistente tra due successioni di valori, è possibile formulare dei Principi che prefigurino un ordine generale nel comportamento di dette relazioni. Quindi è possibile individuare degli elementi logici, il cui significato consiste nel rappresentare posizioni spaziali, suscettibili di essere collegati dal sistema stesso delle relazioni.

Vediamo schematicamente come si realizzano le due fasi.

Il Principio della continuità, da Leibniz indicato come il cardine logico della sua analisi, diviene un vero e proprio Principio dell'ordine in ragione del quale si caratterizza logicamente il movimento stesso (intendendolo come una relazione): se due successioni di valori sono legate da una legge che rappresenta la continua variazione di direzione del movimento, la relazione sussistente tra gli elementi delle due successioni continua a sussistere anche quando si passa ai limiti delle due serie di valori.

Leibniz ne dà anche una versione che riguarda la semplice variazione rettilinea del movimento (ad esempio quella di un *mobile* che si muove lungo una linea retta, quindi lungo una successione di punti). In quest'ultimo caso il *Postulato* si riduce al fatto che, se si dà una determinata variazione continua che giunga ad un termine ultimo, sarà sempre possibile una comune impostazione che comprenda lo stesso termine ultimo.

La seconda formulazione ci dice che, relativamente allo schema euclideo-eudossiano, in cui un determinato rapporto A/B è da intendersi come il termine di un illimitato avvicinamento da parte di una successione di *razionali* del tipo $T_1, T_2, T_3 \dots T_n \dots$, tracciando una *sezione* tra il rapporto A/B e la successione, la *sezione* si distingue da A/B ed appartiene, quanto al suo valore logico, alla successione stessa.

La prima formulazione ci dice che un'ipotetica relazione, sussistente tra i termini di due successioni, ciascuna con le caratteristiche logiche di quella descritta sopra, continua a sussistere anche relativamente alle sezioni che ne delimitano i valori.

Come abbiamo già anticipato, possiamo dire di avere a disposizione i canoni logici generali relativi al comportamento delle relazioni.

Si tratta, ora, di individuare gli *elementi semplici* suscettibili di essere collegati da un sistema di tal fatta.

Uno di questi elementi lo avevamo già incontrato: trattasi della nozione di sezione.

In sintesi: definito il moto come *mutamento di posizione*, e la traiettoria come il *continuo e successivo luogo della cosa mobile*, la *sezione* rappresenta la possibilità di individuare una posizione nel continuo della traiettoria, sia nel caso in cui la *sezione* rappresenta un *limite* (trattasi della situazione in cui la sezione rappresenta, per cosí dire, la *posizione che genera la traiettoria*, oppure che la *conchiude*), sia nel caso in cui rappresenta una *traccia* (trattasi della possibilità di sezionare la traiettoria individuando una posizione che separi, alla sua sinistra ed alla sua destra, tutti i punti della traiettoria stessa)[9].

Limitando a questo punto il nostro *excursus* sugli elementi semplici di Leibniz, possiamo chiederci quale sia il valore di una simile struttura metafisica.

Leibniz ci dice che le *posizioni* non rappresentano affatto estensioni. Con ciò vuole dire che non ha alcun senso applicare i criteri logici tipici dell'algebra (ad esempio il postulato di Archimede o la proprietà di esaustione) per mostrare che detti elementi implicano contraddizioni.

Da questo momento in poi l'aritmetica e la geometria elementare dovrebbero cessare di essere considerate il modello unico cui fare riferimento: accanto alla tradizionale prospettiva della *grandezza esten-*

[9] È possibile seguire la falsariga di quanto siam venuti dicendo sulla metafisica di Leibniz tenendo presente quanto segue. Sul significato della nuova analisi come scienza che sancisce il primato della relazione sulla grandezza confrontare: *De analysi situs*, *Mathematische Schriften*, cit., vol. V, p. 178 ss.; *Initia rerum mathematicarum metaphysica*, *Mathematische Schriften*, cit., vol. VII, p. 24 ss. Sulla duplice formulazione del *Principio di continuità* confrontare: *Justification du calcul des infinitésimales par celui de l'algèbre ordinaire*, *Mathematische Schriften*, cit., vol. IV, pp. 104-106; *Cum prodiisset atque increbuisset analysis mea infinitesimalis*, *Mathematische Schriften*, cit., vol. V, p. 392 ss. Sul carattere logico del movimento inteso quale principio che riassume il concreto relazionale che sta a fondamento dell'indagine matematica confrontare: *Hypotesis physica nova*, *Matematische Schriften*, cit., vol. VI, p. 68 ss. Sul significato logico dell'infinitamente piccolo confrontare: *Lettera a Johann Bernoulli*, *Mathematische Schriften*, vol. III, p. 499; *Responsio ad nonnullas difficultates a Dn. Bernardo Nieuwentijt circa methodum differentialem seu infinitesimalem notas*, *Mathematische Schriften*, cit., vol. V, p. 320 ss. Sul tema della metafisica come sostrato concreto della nuova analisi confrontare: *Nouvelles lettre et opuscules inédits de Leibniz*, pubblicati da Foucher de Careil, Paris 1857, p. 327 ss.

siva (tipica ad esempio degli *Elementi* ed in generale del cosiddetto rigore euclideo-archimedeo) viene costruita una nuova prospettiva basata sulla *grandezza qualitativa*; quest'ultima sta a designare appunto la nuova provincia della matematica fondata sulle strutture logiche dell'infinito.

Non è che la grandezza qualitativa sia completamente estranea all'estensione, significa soltanto che intrattiene con quest'ultima un rapporto diverso da quello tradizionale. Infatti gli ordinari simboli dell'aritmetica nascono e si giustificano come simboli di estensioni (un numero è suscettibile di una applicazione immediata nella misurazione di un segmento), al contrario la nuova matematica si emancipa completamente dalla richiesta di immediatezza e in questo senso può costruire concetti che, pur essendo fondati sull'infinito, non incorrono nelle antinomie derivanti da una loro immediata riduzione ad estensioni.

Leibniz si rende conto che la nuova prospettiva crea una radicale frattura all'interno della matematica, tanto che egli stesso enuncia con forza la differente organizzazione logica dei due tipi di grandezze: quella estensiva presuppone che la *parte* sia data prima del *tutto* (in questo caso il tutto è il risultato di una procedura di composizione di parti, allo stesso modo in cui un dato segmento è il risultato della composizione di segmenti unitari), quella qualitativa presuppone una struttura logica rovesciata, infatti il *tutto* è dato prima delle *parti* e non è frutto di alcuna procedura di composizione.

Stante questa divaricazione, Leibniz si propone di colmarla cercando di fondare direttamente sull'infinito l'intiero campo della matematica, in modo tale che ad un certo limite la prospettiva della grandezza qualitativa (fondata appunto sull'infinito) coincida con quella estensiva.

In questa prospettiva la metafisica del movimento assumerebbe un duplice ruolo: oltre che riassumere disposizionalmente i problemi concreti del moto, dovrebbe rappresentare altresí una struttura di corrispondenza relativa a teorie (quella algebrica e quella differenziale) altrimenti incompatibili.

Se è vero che i problemi fisici del moto possono essere riepilogati mediante una metafisica dell'infinito che ordini preventivamente il loro significato empirico, allora — sempre nelle intenzioni di Leibniz — è proprio in questa prospettiva di massima apertura reale che è possibile rintracciare la giustificazione originaria per una corrispondenza tra le teorie. Non si tratta di mostrare che due tipi di calcolo sono compatibili perché in qualche modo le loro strutture formali sono immediatamente riducibili le une alle altre, bensí che la loro compatibilità è implicita nella rete di problemi concreti che sempre orientano le teorie.

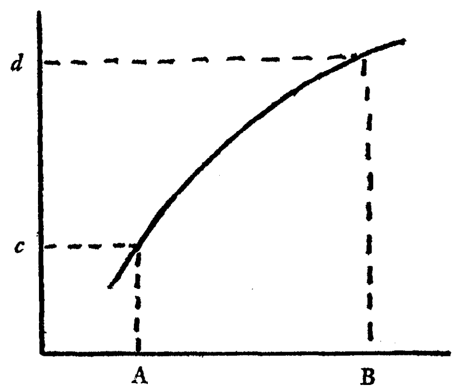
Se si interpretano i problemi fisici della variazione del movimento all'interno di una struttura che li rappresenti come relazioni, allora è proprio relativamente a questa struttura esplicativa che va misurata la compatibilità delle teorie simboliche. In questo ambito — secondo Leibniz — la tradizionale prospettiva dell'estensione può essere riconsiderata alla luce di una piú sofisticata prospettiva della relazione.

Vediamo, in concreto, come si articola la riflessione leibniziana.

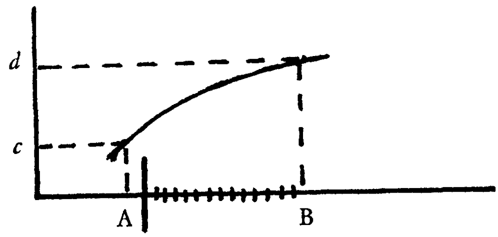
La prospettiva della *Quantità*, tipica delle discipline matematiche tradizionali, porta su raffronti di grandezze. In questo senso si rende necessario il riferimento ad un *tertium quid* che funga da misura. Ad esempio due segmenti possono essere raffrontati solo se la loro lunghezza è ottenibile costruttivamente mediante la reiterazione di un segmento unitario.

Al contrario la *Qualità* non implica raffronti estrinseci in quanto indaga le relazioni intrinseche tra gli elementi di una figura o di una formula matematica.

Ad esempio se indaghiamo l'andamento di una curva, ci troviamo dinnanzi ad una relazione intercorrente tra due successioni di valori. Ovviamente, da un punto di vista rigorosamente estensivo, la variazione della direzione di una curva avverrà sempre in relazione ad un *tratto*, fissato sull'asse delle ascisse, quindi in relazione ad un *tertium quid* unitario che permetta di visualizzare la variazione della direzione mediante una linea curva.



Se invece la variazione della direzione deve essere determinata in un dato istante, diventa impossibile misurarla usando lo schema precedente. Ad esempio, se dobbiamo misurare detta variazione nell'istante A, occorrerà individuare sulla successione AB un punto limite rappresentato dalla sezione che separa il punto A da tutti i restanti punti. Cioè occorre individuare un differenziale. Ed in quest'ultimo caso l'indagine avverrà in ragione di una prospettiva intensiva.



Da questo punto di vista, sempre secondo Leibniz, risulta possibile estendere all'intiero campo della matematica la struttura fondazionale dell'infinito. Infatti, facendo riferimento agli esempi precedenti, quello che distingue le due prospettive sono i differenti livelli logici della relazione: nel primo caso si hanno relazioni tra grandezze, nel secondo caso tra differenziali, ma in entrambi i casi il punto di vista della relazione resta il punto di vista centrale: da questo momento in poi si può ragionevolmente inferire che, in ogni caso, le teorie matematiche risulterebbero subordinate ad una superiore metafisica dell'infinito [10].

[10] Leibniz schematizza la struttura logica dell'infinito nel saggio dal titolo: *Initia rerum mathematicarum metaphysica.* Si tratta di una messa a punto sistematica dell'intiero arco della riflessione leibniziana sulla matematica. Infatti Leibniz scrisse il saggio senz'altro dopo il 1714. Questo si può dedurre facilmente dalle notizie che Leibniz stesso ci fornisce in apertura del suo scritto. Sugli *Acta Eruditorum* di Lipsia fu pubblicata una recensione anonima dell'opera del matematico Christian Wolff, docente ad Halle dal 1706, dal titolo *Elementa mathesos universae.* L'opera riprende la struttura del corso latino di matematica fatto ad Halle e di cui nel 1710 era uscita la versione tedesca *Anfangsgründe aller mathematische Wissenschaften.* Ebbene Leibniz ci dice di aver concepito il suo saggio come una sorta di risposta all'opera di Wolff recensita nel 1714 sugli *Acta Eruditorum.* Ancora Leibniz, in apertura del saggio, ci dice di aver raccolto una serie di riflessioni fondamentali, formulate sui *Principi* metafisici della matematica, che lui stesso aveva elaborato lungo tutto l'arco del tempo precedente: trattasi dei *Principi* che subordinano la scienza matematica a una piú generale dottrina metafisica delle forme logiche.

Il saggio, malgrado fosse probabilmente destinato alla pubblicazione sugli *Acta*

Partendo da questo assunto, viene costruita un'intelaiatura di nozioni che funge da fondamento complessivo per la matematica e che, nello stesso tempo, garantisce una corrispondenza tra la teoria differenziale e le teorie tradizionali.

Vediamone brevemente i punti salienti.

Il punto può essere considerato l'aspetto piú semplice della relazione: i punti rappresentano le coordinate relazionali della posizione.

Ad esempio si può dire che due punti individuano una retta, tre punti individuano un piano e cosí via [11].

Un aspetto piú elevato della *relazione* è rappresentato dal concetto di *sezione*, già incontrato a proposito della giustificazione del calcolo differenziale.

Il punto in quanto ente idealizzato risultava già operativo nella geometria euclidea, nel caso della sezione si tratta di un punto limite con la funzione di delimitare i punti stessi.

Il significato di quanto siam venuti dicendo è evidente. Se ci rappresentiamo i punti senza dimensioni della geometria euclidea come se fossero delle piccole sferette, la nozione della *sezione* ci dice che, su di un segmento AB, è possibile tracciare, fra un punto e l'altro, una sezione in modo tale da avere tutti i punti del segmento alla destra od alla sinistra della sezione tracciata.

È chiaro che, anche in questo caso, abbiamo a che fare con punti senza dimensioni (tracciando una sezione su di una retta individuiamo un punto) quindi indistinguibili estensionalmente dalla nozione euclidea di *punto*, tuttavia distinguibili quanto alla loro funzione logica: i punti limite hanno la funzione di limitare punti.

Eruditorum, rimase inedito, tuttavia, proprio in ragione della sua struttura riepilogativa, può essere considerato una sorta di *summa* dell'intiera metafisica matematica di Leibniz. Gli *Initia rerum mathematicarum metaphysica* furono successivamente pubblicati da Gerhardt nei *Mathematischen Schriften*, cit., VII, pp. 17-29.

[11] È evidente che il punto non è omogeneo con la retta cosí come lo è un possibile segmento unitario: un segmento di una data lunghezza non può essere il risultato di una somma di punti in quanto questi ultimi sono senza estensione. Secondo Leibniz una qualsiasi relazione non può essere omogenea con l'insieme di cose che individua. Questo in quanto la relazione appartiene ad un livello logico differente. Si può dire — sempre a detta di Leibniz — che il punto è omogono con la retta, intendendo la proprietà del punto di individuare rette senza che per questo la relazione e le cose generate dalla relazione debbano essere poste sullo stesso piano, quindi debbano essere omogenee.

In questo modo è come se venisse postulata una nozione di *continuità* piú forte rispetto a quella euclidea: negli interstizi fra un punto e l'altro è possibile individuare una ulteriore rete di punti limite che riempiono di piú la *linea* rispetto alla concezione euclidea [12].

Su di una intelaiatura di tal fatta — a detta di Leibniz — risulterebbe possibile intendere la matematica nel suo complesso come un calcolo di posizioni e di relazioni spaziali: non solo il calcolo differenziale ma anche ogni altra teoria classica, tradizionalmente basata sulla *grandezza*, risulterebbe connotabile in questo senso.

Infatti la stessa geometria euclidea potrebbe essere facilmente traducibile in questa nuova prospettiva: cosí come una *retta* è compiutamente determinata attraverso due dei suoi punti, i quali rappresentano le condizioni determinanti della sua posizione nello spazio, cosí un'identica trattazione può essere estesa a tutti i fondamentali concetti geometrici storicamente basati sulla grandezza.

Ci troviamo in una situazione in cui il calcolo differenziale non rappresenterebbe altro che una branca del piú generale calcolo delle posizioni spaziali [13].

La stessa teoria dei numeri viene fondata da Leibniz sulla metafisica della *grandezza qualitativa*: i numeri rappresenterebbero altrettanti simboli di relazioni.

Il tipo di relazione piú semplice sarebbe rappresentato dalla Proporzione (che Leibniz indica col termine di *Ratio*); questa obbedirebbe intieramente alla logica della grandezza qualitativa: trattasi — sempre a

[12] Dobbiamo ancora ricordare che — nella prospettiva leibniziana — questo tipo di struttura interpretativa non può incorrere nei tipici paradossi dell'estensione: qui ci troviamo nell'ambito della grandezza qualitativa dove ciò che può essere indistinguibile estensionalmente può essere distinguibile quanto alla sua funzione logica. In quest'ultima prospettiva — sempre a detta di Leibniz — non può sussistere il piú e il meno ma esclusivamente il valore concettuale con il susseguente valore operativo. Ad esempio dobbiamo intendere il valore concettuale della *sezione* come quello di una prospettiva nomologica che sistematizza i problemi del moto.

[13] Relativamente al programma leibniziano sul nuovo *calcolo delle posizioni spaziali* occorre tener presente soprattutto: *Characteristica geometrica*, *Mathematische Schriften*, cit., vol. V, p. 143 ss.; *De analysi situs*, *Mathematische Schriften*, cit., vol. V, p. 178 ss.; *Speciem geometriae luciferae*, *Mathematische Schriften*, cit., vol. VII, p. 263 ss. Inoltre il già citato *Initia rerum mathematicarum metaphysica* che costituisce, per cosí dire, la *summa* della riflessione leibniziana sul problema delle relazioni.

detta di Leibniz — della *relazione tra due quantità omogenee che sorge da esse sole senza assumerne una terza omogenea.*

Ad esempio, dati due segmenti, che denotiamo rispettivamente con y e x, se y sta ad x come un numero all'unità, si avrà la relazione $y/x = n$, cioè una relazione di cui il numero ne è l'espressione simbolica.

Ancora: vi sono relazioni tra segmenti piú complesse del loro semplice rapporto. Ad esempio $y = \log. 1 + x$ rappresenta una relazione *logaritmo* suscettibile di uno *sviluppo in serie* ed, in questo caso, il numero rappresenta l'espressione simbolica della serie stessa.

In sostanza Leibniz pensa che le differenti specie numeriche, *interi, razionali, irrazionali, trascendenti*, etc., possano essere interpretati come simboli di relazioni e di sviluppi in serie, siano queste ultime finite o infinite.

Trattasi di una concezione che non può essere affatto interpretata, nel nostro senso attuale, come una vera e propria teoria dei fondamenti, piuttosto trattasi di una concezione che intende le specie numeriche come costituenti un sistema aperto di differenti possibilità simboliche. Qualsiasi tipo di relazione classica, quindi qualsiasi tipo di segmento di numeri (in quest'ultimo caso *procedure infinite* delimitabili mediante la logica della *sezione*) sono suscettibili di essere anagrammati mediante la costituzione di specie numeriche differenti e sempre piú complesse, ciascuna costituita da apparati simbolici specifici [14].

A questo punto le linee direttrici della metafisica leibniziana cominciano a chiarirsi: fondare le matematiche su di una intelaiatura logico-metafisica costituita da relazioni non solo permette di interpretare unitariamente le teorie come altrettanti calcoli di posizioni spaziali, ma permette altresí di configurare un certo limite entro il quale la nuova concezione coincide con la vecchia concezione basata sulla *grandezza*. Piú precisamente: nel sistema metafisico delle relazioni è possibile individuare un certo grado di semplicità in ragione del quale i simboli di relazioni possono essere considerati indifferentemente simboli di estensioni.

Ad esempio, se noi consideriamo quello che lo stesso Leibniz chia-

[14] Circa questi argomenti rimandiamo ancora agli *Initia rerum mathematicarum metaphysica*, *Mathematische Schriften*, cit., vol. VII, pp. 17-29. Ne esiste una traduzione italiana in *Leibniz, scritti di lagica*, a cura di Francesco Barone, Bologna 1968, pp. 260-275.

ma *il caso piú semplice della relazione* (trattasi della proporzione interessante due segmenti a e b), possiamo trarre facilmente la seguente conclusione: se a e b rappresentano segmenti commensurabili, allora l'espressione simbolica $a/b = n$ ci dice che n rappresenta un numero intero che può essere considerato indifferentemente tanto un simbolo di relazione quanto un simbolo di estensione.

Al contrario, se consideriamo il simbolo differenziale, possiamo considerarlo esclusivamente come l'espressione simbolica delle relazioni, connesse con il concetto di posizione rappresentato dalla *sezione*.

In sostanza si realizzerebbe una compatibilità tra le due prospettive solo ad un certo limite, identificabile quest'ultimo con un criterio di maggiore o minore complessità[15].

1.3. *Le obiezioni di Nieuwentijt.*

Le difficoltà maggiori incontrate da Leibniz provenivano da due direzioni distinte. La prima era costituita dal fatto che il nuovo calcolo, tralasciando il prodotto $dx \cdot dy$, infrangeva il rigore dell'algebra; d'altronde lo stesso simbolo differenziale dx, preso isolatamente, non obbediva al requisito di essere archimedeo e rappresentava una deroga alla proprietà di esaustione. La seconda difficoltà era di ordine epistemologico in quanto il concetto del differenziale non poteva essere giustificato né fondato sulla logica.

Quest'ultimo inconveniente era sintetizzato in maniera evidente dalle cosiddette procedure di *raddoppiamento della secante*; infatti, *raddoppiando* progressivamente la secante, si ottiene sulla curva una successione di punti che, tendendo ad avvicinarsi illimitatamente al punto di tangenza, individuano un *punto limite* che non può piú essere giustificato mediante una logica tipo *genere* e *specie*. Anzi nel punto in oggetto, risulta soppressa ogni possibilità di distinzione tra *secante*, *arco*

[15] Dobbiamo ricordare che Leibniz nelle sue argomentazioni a favore della piena legittimità scientifica del calcolo differenziale non si serve soltanto della struttura di corrispondenza che abbiamo appena schematizzato. Ad esempio nella *Nova methodus* (la sua prima pubblicazione ufficiale sulla scoperta del nuovo calcolo) abbozza una spiegazione direttamente riduzionista all'algebra. E nella sua *Justification du calcul des infinitésimales par celui de l'algèbre ordinaire* usa indifferentemente le tecniche di riduzione e di corrispondenza come equivalenti. La stessa cosa, almeno in parte, avviene nella sua *Responsio* alle obiezioni di Nieuwentijt.

di curva e *tangente*. E questo rappresentava, a quel tempo, un evidente paradosso logico.

Leibniz, come abbiamo visto, agisce in maniera radicale e contrappone alla logica tradizionale una nuova logica delle relazioni rappresentata dall'*analysis situs*. Solo in virtú di questa nuova logica i *differenziali* risulterebbero efficacemente fondati.

Ovviamente l'impostazione era destinata ad accendere polemiche, soprattutto in relazione a quello che era ritenuto lo scarso rigore del calcolo: in un primo momento venivano introdotti dei simboli che rientravano a tutti gli effetti nella procedura, poi li si tralasciava come inessenziali.

In questo senso Bernhard Nieuwentijt, teologo calvinista olandese, non ha nulla da obiettare all'*analysis situs* come tale, anzi concorda in pieno con l'esigenza di una nuova logica delle relazioni, quello che invece gli risulta inconcepibile è appunto il paradosso di calcolo relativo al problema del *tralasciamento*.

Nieuwentijt ritiene che il paradosso sia imputabile al fatto di infinitesimalizzare i *differenziali* creando conseguentemente una gerarchia di *infiniti* completamente fuori dalla portata della cognizione umana. Se gli infinitesimi possono, in linea di principio, essere accettabili in quanto equiparabili agli indivisibili — afferma con forza l'olandese nelle *Considerazione* — risultano, però totalmente inaccettabili quando si vuole applicare l'infinito all'infinitesimo stesso, cioè quando si vuole sottoporre ad una procedura di infinita divisibilità quello che per sua stessa costituzione è considerato indivisibile. Ciò infatti conferirebbe alla materia la prerogativa ed il potere di far proliferare l'infinito vanificando completamente la forza infinita che dovrebbe competere solo a Dio.

Sulla base di queste convinzioni Nieuwentijt ritiene che il calcolo differenziale dovrebbe mettere capo ad una nuova algebra che può usare legittimamente i simboli differenziali, tipo dx, ma che è obbligata a considerare uguale a *zero* il prodotto $dx \cdot dy$.

Prima nelle *Considerationes*, poi un anno piú tardi nella *Analysis infinitorum seu curvilineorum proprietates polygonorum natura deductae*, tenta di fondare un'algebra che, sino ad un certo punto, coincide con il nuovo calcolo di Leibniz, poi se ne scosta bruscamente relativamente al valore da attribuire al prodotto $dx \cdot dy$ [16].

[16] Quello che abbiamo esposto costituisce lo spaccato teorico delle *Considerationes...*, cit., redatte per confutare il *calcolo* di Leibniz, e della *Analysis infinito-*

Dopo la *Responsio* di Leibniz, pubblicata sugli Acta Eruditorum nel 1695, Nieuwentijt ritorna sull'argomento con le *Considerationes secundae*. L'intento è quello di rafforzare ulteriormente le sue obiezioni alle procedure del *tralasciamento*, quindi ai differenziali di ordine superiore.

In questa prospettiva Nieuwentijt costruisce due paradossi che dovrebbero dimostrare come il calcolo di Leibniz porti necessariamente ad una situazione di *impasse* relativamente ai differenziali di ordine superiore. Infatti, omettendo di considerare i prodotti, i due paradossi mostrano come l'equazione di una curva si riduca ad una retta impedendo la relativa distinguibilità tra *retto* e *curvo*[17].

Leibniz non risponde direttamente alle ulteriori obiezioni di Nieuwentijt; della risposta si incarica Jakob Hermann il quale si limita a condurre le contro-obiezioni sul terreno del calcolo cioè esclusivamente sul terreno posto in causa da Nieuwentijt stesso.

Hermann cerca di dimostrare che le conclusioni paradossali cui perviene l'olandese sono imputabili al fatto di dare per presupposto il prodotto $dx \cdot dy$ uguale a *zero*; cioè a dire di presupporre proprio la tesi che in realtà dovrebbe essere dimostrata[18].

Tuttavia il problema risulta tutt'altro che esaurito. Infatti i due paradossi del teologo olandese presuppongo un ulteriore paradosso, questa volta non di stretta pertinenza del calcolo, che colpisce la nuova teoria su di un piano esclusivamente epistemologico.

Infatti contro le intenzioni dello stesso Nieuwentijt che ammetteva la legittimità dei simboli differenziali tipo dx e dy (la sua polemica era diretta esclusivamente contro gli infinitesimi di ordine superiore) il paradosso dell'indistinguibilità tra retto e curvo finisce per colpire la stessa legittimità dei differenziali *tout court*.

Le stesse metodologie del *raddoppiamento della secante* implicavano il paradosso dell'indistinguibilità. Nel *punto limite*, identificato dalla sezione, risultavano indistinguibili rispettivamente *secante, arco di curva*

rum seu curvilineorum proprietates ex polygonorum natura deductae, Amstelaedami 1695, che costituisce, per così dire, l'opera propositiva di Nieuwentijt.

[17] Nieuwentijt costruisce i due paradossi nelle *Considerationes secundae*, cit., confrontare soprattutto p. 20 ss.

[18] Hermann, professore di matematica a Basilea, prende posizione contro Nieuwentijt con l'intento di chiudere una polemica che lui ed i Bernoulli (Jakob e Johann) consideravano di scarso significato per la matematica. Cfr. *Responsio ad Clarissimi Viri Bernh. Nieuwentijt* ..., cit., soprattutto a p. 10 ss.

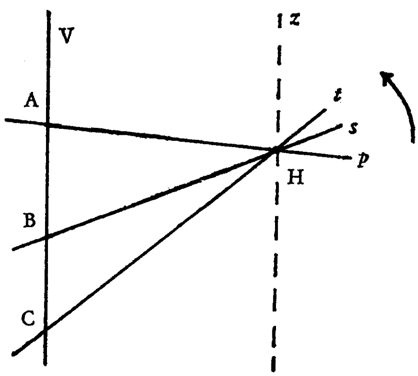
e *tangente*, quindi in certo qual modo risultavano annientate nella loro consistenza concreta.

Leibniz si rende perfettamente conto che, di fatto, le *Considerationes* mettevano in evidenza un enigma epistemologico che andava ben oltre il problema del rigore del calcolo e che finiva per colpire la stessa consistenza logica dell'*analysis situs*.

In questo senso, alcuni anni piú tardi, stende il manoscritto *Cum prodiisset atque increbuisset...* con l'intento di fornire precisazioni epistemologiche al problema. Ed ancora ritorna sull'argomento in una lettera a Dangicourt del 1716 per tentare di rendere ragione dell'enigma secondo cui l'analisi del concreto finisce per sopprimere il concreto stesso [19].

Leibniz nella lettera a Dangicourt chiarisce la questione con un esempio di questo tipo.

In geometria, quando si fa ruotare la retta *p* sul punto *H*, si ottiene una successione, costituita dai vari punti di intersezione sulla retta V, ebbene, se la rotazione porta alla posizione *z*, a rigore non esiste piú alcuna intersezione (*z* è parallela a V). Ciò non toglie che, nelle intenzioni di Leibniz, sia possibile delimitare con una sezione la successione infinita delle intersezioni A, B, C, ecc. in modo tale da ottenere una posizione che non rappresenta nulla dal punto di vista dell'estensione (indistinguibilità tra retta intersecante e retta parallela) ma rappresenta qualcosa dal punto di vista della relazione. Quest'ultimo caso infatti ci permette di trattare unitariamente la posizione limite con tutti i suoi casi intermedi.



[19] Cfr. *Cum prodiisset atque increbuisset, Mathematische Schriften*, cit., vol. V, soprattutto a p. 400 ss. e Lettera a Dangicourt (1716), in *Gothofredi Guillelmi Leibnitii, Opera Omnia*, Genevae 1768, t. III, pp. 499-502.

Con questo esempio Leibniz vuol ribadire la necessità epistemologicamente virtuosa della soppressione del concreto, proprio in virtú del fatto che risulta sempre possibile rappresentare una corrispondenza con la prospettiva soppressa cioè con la vecchia logica dell'estensione. Infatti, continua Leibniz, dal punto di vista dell'estensione si sa bene che la parallela non incontra affatto la retta V.

Nel manoscritto *Cum prodiisset atque increbuisset...* Leibniz precisa lo stesso fatto in relazione al problema dell'*identità* riferita alla legge di continuità.

In una successione che si avvicina illimitatamente ad A è possibile individuare una posizione riconducibile all'ambito relazionale della successione stessa, quindi che si distingue da A; nello stesso tempo, dal punto di vista dell'estensione, quindi del metodo di esaustione, dato che nessun elemento T si *infiltra* tra la sezione ed il termine A, è possibile inferire che la posizione della sezione coincide con la posizione dello stesso termine A.

Con il che Leibniz fornisce una legittimazione alla soppressione del concreto in virtú del fatto che la relazione intrattiene sempre, ad un certo limite, una corrispondenza con l'estensione. E questo significa, in certo qual modo, legittimare la possibilità epistemologica di predicare, di una stessa cosa, sia l'identità sia la non identità[20].

Indubbiamente i meriti di Leibniz sono evidenti, cosí come è evidente, ai nostri occhi, la sua lungimiranza logica a favore del problema della relazione, tuttavia, all'epoca, la situazione doveva restare alquanto problematica.

La prospettiva della relazione doveva in qualche modo sopprimere la prospettiva dell'estensione quindi doveva derogare radicalmente dalla logica tipo *genere* e *specie* cioè a dire doveva derogare dai paradigmi giustificazionisti dell'epoca.

[20] Sui differenziali di ordine superiore in Leibniz si veda H. J. Bos, *Differentials, Higher-order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus*, « Archive for History of Exact Sciences », XIV (1974). Purtroppo a tutt'oggi non esiste una ricerca critica sui riflessi storici che, all'epoca, ebbe il paradosso epistemologico di Nieuwentijt.

Ovviare alla situazione, in virtú della condizione secondo cui risulta sempre possibile stabilire una c o r r i s p o n d e n z a , non toglie nulla al fatto che vi sia perlomeno un ambito in cui detta corrispondenza non si verifica. Quindi che vi sia un ambito non uniformabile ai canoni logici dell'epoca.

Da questo punto di vista il paradosso epistemologico di Nieuwentijt, anche contro le stesse intenzioni del teologo olandese, diviene un punto di riferimento costante per tutta l'epistemologia matematica dell'epoca sino a tutto l'arco della seconda metà del settecento.

L'enigma di fondo è rappresentato dalla difficoltà di rendere ragione epistemologicamente della controfattualità implicita nella prospettiva relazionale cioè, come abbiamo già detto, nella prospettiva della s o p p r e s s i o n e d e l c o n c r e t o .

Capitolo II

IL DIBATTITO SULLE « CORDE VIBRANTI » ED IL « RITORNO ALLA METAFISICA » NELLA MATEMATICA DELLA SECONDA METÀ DEL SETTECENTO

2.1. *Il dibattito sulle corde vibranti.*

L'evoluzione del calcolo, lungo tutto l'arco della prima metà del settecento, segnò l'affermarsi dell'approccio funzionale al problema dei differenziali.

Le serie divennero il punto di riferimento costante presso i matematici dell'epoca e di fatto divenne di uso comune trattare la nuova teoria come un calcolo funzionale basato sulla prospettiva seriale.

Euler codifica questa tendenza, già storicamente in atto, mediante una vera e propria teoria fondazionale che fa del concetto di funzione il fondamento primo dell'approccio matematico.

La funzione viene identificata con le serie ed il calcolo differenziale diviene una branca del piú generale calcolo seriale; è evidente che, da questo punto di vista, verrebbe completamente evitata la necessità di fondare il nuovo calcolo sul rigore dell'algebra, quindi verrebbero evitati i cosiddetti paradossi imputabili al *tralasciamento.*

Euler, in apertura della sua *Introductio in analysin infinitorum* afferma che una *funzione di quantità variabili* deve essere considerata un'*espressione analitica* composta in modo qualunque da quelle *quantità* e da *numeri* o *quantità costanti* Col termine *espressione analitica* Euler intende un'espressione composta da grandezze simboliche mediante *operazioni algebriche* (addizione, sottrazione, moltiplicazione, etc.) oppure *trascendenti* quali il *logaritmo*, l'*esponenziale* ed altre tipiche del *calcolo differenziale* ed *integrale.*

Connessa a questa distinzione vi è quella fra *funzioni algebriche* e *trascendenti*: le prime sono ottenibili mediante un numero finito di operazioni elementari (trattasi delle operazioni descritte poco sopra), le seconde sono ottenibili mediante un numero infinito di operazioni elementari, quindi mediante *serie infinite*.

Coerentemente con queste distinzioni Euler, nel quarto capitolo dell'*Introductio*, afferma che la maniera piú generale per esprimere una funzione consiste in una serie infinita del tipo:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$$

Indipendentemente dal fatto che Euler stesso lascia aperta la possibilità di esprimere una funzione $f(z)$ in *serie* con esponenti qualunque di z e non solo mediante potenze ascendenti della stessa z, ed indipendentemente dalla problematicità, unanimemente rilevata dagli storici della matematica, della distinzione fra funzioni algebriche e trascendenti (l'espressione analitica che rappresenta le funzioni non lascia rilevare la loro caratteristica di essere algebriche o trascendenti, infatti serie infinite di potenze ascendenti dell'incognita x possono definire ugualmente funzioni dei due tipi), ci troviamo dinnanzi ad una importante innovazione [1].

Infatti Euler si basa su di un assunto fondamentale: quello di mettere alla base dell'edificio matematico il concetto di funzione, definito quale sviluppo in serie secondo potenze di un incremento, i quozienti differenziali e l'integrale.

Euler non dimostra questo suo assunto (cioè non dimostra che una qualsiasi funzione $f(x)$ sia rappresentabile mediante tali serie) ma si limita a considerarlo pragmaticamente evidente. È ovvio che, se l'intiero edificio della matematica viene fondato su di un tale presupposto assiomatico, tutti i concetti, all'epoca epistemologicamente incerti, quali ad esempio i differenziali e le derivate, perderebbero ogni problematicità: basterebbe definirli, ad esempio, in relazione alla funzione che esplicano nella serie. Dobbiamo ricordare che proprio in ragione di questo tipo di generalizzazione divenne *standard*, presso i matematici dell'epoca, definire la derivata quale coefficiente del termine di primo grado

[1] Sul problema dell'indistinguibilità tra *funzioni algebriche* e *trascendenti* cfr. A. Pringsheim, *Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre*, « Enzykl. math. Wiss. », II (1899).

di una serie di Taylor ed il differenziale dx, in pratica, quale un operatore di calcolo.

Lo stesso concetto di continuità, in questo contesto, può essere enunciato senza difficoltà. Euler, nel secondo volume della sua *Introductio*, definisce la continuità di una linea curva come quel caso in cui la linea è espressa da una sola funzione della x, cioè quando vi è un'unica espressione analitica per l'intiera curva.

Ovviamente una curva è discontinua quando è rappresentata da piú espressioni analitiche [2].

In tal modo si raggiunge una decisa generalizzazione in grado di fondare unitariamente l'intiero campo della matematica sul concetto astratto di serie. Infatti nella definizione del concetto di funzione e di continuità è del tutto assente ogni riferimento fisico al movimento ed ogni riferimento logico alla metafisica: i concetti vengono espressi in termini puramente formali come combinazioni di quantità variabili e costanti con relativi segni di operazioni. In questo contesto lo stesso concetto di integrale risulta definito esclusivamente alla luce del *teorema dell'inversione*, cioè come operazione inversa della *differenziazione*.

Quale è il significato epistemologico di una mossa di questo tipo?

L'intiero campo della matematica, sia esso rappresentato dall'algebra o dal nuovo calcolo differenziale, viene fondato su concetti primitivi, quindi definibili solo implicitamente dagli assiomi che li collegano.

Ad esempio concetti primitivi quali le *quantità variabili*, i *numeri* o *quantità costanti*, risultano collegati in una struttura (rappresentata dalle serie) tramite *operazioni algebriche* o *trascendenti* o *fornite dal calcolo differenziale*. In tal senso una funzione è rappresentata da una struttura costituita da operazioni (semplicemente postulate) che collegano concetti primitivi.

Questo impianto rappresenta una vera e propria assiomatizzazione in grado di tradurre formalmente qualsiasi tipo di funzione. Che si sia in grado di farlo, secondo Euler, è da ascriversi ad un fatto puramente ostensivo: chi non ci crede non ha altro da fare che guardare e

[2] Il filo delle argomentazioni di Euler, testé eposto, si trova nella sua *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, Bousquet, 1748; ora in *Opera Omnia*, serie I, voll. 8-9, Leipzig - Berlin 1922. Riguardo la definizione matematica di *funzione* e la distinzione tra *funzioni algebriche* e *trascendenti* cfr. in *Opera Omnia*, cit., vol. 8, p. 4 ss. e p. 74 ss. Circa il problema matematico della continuità cfr. ivi, vol. 9, p. 4 ss.

mettersi a calcolare, quindi vedrà che una qualsiasi funzione è rappresentabile in questo modo.

I vari campi della matematica verrebbero sottoposti ad un'unica prospettiva formale senza alcuna divaricazione tra calcolo differenziale e teorie algebriche tradizionali. Con ciò verrebbe eliminata la necessità di ricorrere alle vecchie metafisiche del moto e parimenti verrebbe vanificata ogni istanza atta a prefigurare strutture di corrispondenza tra i vari campi.

I vantaggi di una simile generalizzazione sono evidenti: il campo della matematica viene ridotto ad una prospettiva omogenea in cui risulta possibile trattare unitariamente le nozioni mediante un'identica prospettiva formale [3].

Le speranze dei matematici, alla metà del secolo dopo la pubblicazione dell'*Introductio*, erano quelle di poter contare su di una matematica rigorosa fondata sulla logica seriale; tuttavia il cosiddetto dibattito sulle corde vibranti vanificò ben presto le troppo ottimistiche aspettative.

La discussione, in origine, riguardò un problema di carattere fisico-matematico, quello di studiare le vibrazioni di una corda in un piano, successivamente la questione ebbe un'importante ripercussione sulla matematica astratta. Sulla base di un precedente lavoro di Johann Bernoulli si sviluppò un vivace dibattito che coinvolse i matematici piú rappresentativi dell'epoca: inizialmente d'Alembert ed Euler, quindi Daniel Bernoulli e J. L. Lagrange [4].

[3] Per un breve bilancio sull'*Introductio in analysin infinitorum* cfr. C. B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York 1959, soprattutto i capp. IV e V.

[4] Riguardo la cosiddetta polemica sulle corde vibranti occorre tener presente le seguenti memorie: Johann Bernoulli, *Theoremata selecta pro conservatione virium vivarum demonstrandum* ... (1727), in *Opera Omnia*, 4 voll., Lausanne e Génève 1742, vol. 3, pp. 124-30; *Meditationes de chordis vibrantibus* ... (1728), ivi, vol. 3, pp. 198-210; D'Alembert, *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, Mém. Acad. Sci. Berl., vol. 3, pp. 214-19 (1749); *Suite des recherches sur la courbe* ..., ivi, vol. 3, pp. 220-52 (1749); *Addition au mémoire sur la courbe* ..., ivi, vol. 6, pp. 355-60 (1752); *Recherches sur le vibrations des cordes sonores*, Pamph. math. I, pp. 1-73 (1761); L. Euler, *De vibratione chordarum exercitatio* (1749), in *Opera Omnia*, cit., ser. 2, vol. 10, pp. 50-62; *Remarques sur les mémoires précédentes de Mr. Bernoulli* (1755), ivi, ser. 2, vol. 10, pp. 233-54; *Sur le mouvement d'une corde qui au commencement n'a été ébranlé que dans une partie* (1767), ivi, ser. 2, vol. 10, pp. 446-50; Daniel Bernoulli, *Réflexions et éclaircissement sur les nouvelles vibrations des cordes*, Mém. Acad. Sci.

La questione, nelle linee essenziali consisteva nel costruire un'equazione differenziale, quindi occorreva integrarla per ottenere la funzione della corda vibrante. Il problema cruciale si presentava nel momento in cui si decideva di assegnare una effettiva generalità rappresentativa a detta funzione. Infatti, dato che la funzione rientrava in una procedura di integrazione, in ragione del *teorema dell'inversione* secondo cui l'integrazione rappresentava l'operazione inversa della derivazione, la funzione avrebbe dovuto risultare ovunque derivabile cioè avrebbe dovuto risultare continua e rappresentabile mediante un'unica espressione analitica. Tuttavia, come osservò giustamente Euler nei confronti di d'Alembert, questa condizione era fortemente restrittiva in quanto l'intiera procedura metteva in evidenza funzioni della corda vibrante che non erano rappresentabili da un'unica espressione analitica.

Dato che bene o male dette funzioni dovevano essere prese in considerazione, la situazione si rivelava estremamente dirompente: un intiero campo di funzioni costituiva un evidente controesempio alla formalizzazione del concetto generale di funzione. La formalizzazione, cosí come ad esempio era strutturata nell'*Introductio in analysis infinitorum*, poteva prescindere da ogni riferimento concreto e non formale al movimento in ragione di un nucleo di definizioni che prevedevano in primo luogo l'identificazione di una funzione continua con un'unica espressione analitica, in secondo luogo la conservazione di questa proprietà, ove si proceda ad operazioni che sono l'una l'inverso dell'altra, quali appunto la differenziazione e l'integrazione. Ebbene, nel nostro caso, il campo delle funzioni che si presentava all'attenzione dei matematici dell'epoca infrangeva questa sorta di principio della conserva-

Berl., vol. 9, pp. 147-72 (1755); *Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isocrones*, ivi, pp. 173-95 (1755); J. L. Lagrange, *Recherches sur la nature et la propagation du son* (1759), in *Oeuvres*, a cura di G. Darboux e altri, voll. 14, Parigi 1867-1892, vol. I, pp. 39-148; *Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son* (1760-61), ivi, vol. I, pp. 151-331.

Un'ampia documentazione della polemica si trova in C. Truesdell, *The Rational Mechanics of Flexible Elastic Bodies, 1638-1788*, introduzione a L. Euler, *Opera Omnia*, ser. 2, voll. X e XI, *Impensis societatis scientiarum naturalium Helvetiae*, Zurich 1960. Confronta anche M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York 1972; H. Burkhardt, *Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, JBER. dt. MAT. VEREIN, vol. 10, n. 2, pp. 1-180 (1908).

zione e conseguentemente non si lasciava ricondurre alla formalizzazione del concetto generale di funzione [5].

La proposta di d'Alembert, di escludere dal campo dell'analisi tutte quelle curve che non rientravano nei canoni formali del rigore, viene giudicata da Euler in contrasto con le motivazioni concrete che dovrebbero reggere ed orientare le teorie e non viceversa. Euler osserva che la stessa natura fisica del problema impone di affrontare matematicamente situazioni del tutto peculiari. Ad esempio diventa ragionevole supporre che, quando si pizzica la corda per ottenere la vibrazione, questa assuma una posizione iniziale del tutto arbitraria e comunque sempre costituita da due *spezzate* che presentano un *punto angoloso*. In questo caso la $f(x)$ che rappresenta la spezzata (ovviamente la definisce *a tratti*) non è derivabile nel punto angoloso, quindi non è rappresentabile da un'unica espressione analitica. Nonostante questa caratteristica che infrange i principi della formalizzazione teorica, Euler ritiene che dette funzioni debbano essere prese in considerazione proprio in ragione delle motivazioni materiali che stanno alla base del problema. A questo proposito Euler formula una importante distinzione: anche se le diverse parti della curva non sono tenute insieme da alcuna legge formale di continuità, tuttavia sono tenute insieme dalla *descrizione del fenomeno* [6].

[5] I motivi in ragione dei quali la funzione, che dovrebbe rappresenare la posizione della *corda vibrante* (oggetto di studio specifico da parte di D'Alembert ed Euler), non rispettava il *teorema dell'inversione*, era imputabile al modo peculiare con cui si era formalizzato il concetto generale di *funzione*. Se una funzione era rappresentabile da un'unica espressione analitica in un dato intervallo questa doveva mantenere le stesse caratteristiche globalmente, cioè in tutti gli intervalli possibili. Non era concepibile che vi fosse una data espressione analitica in un particolare intervallo e altre in ulteriori intervalli della stessa funzione. Per queste ragioni le procedure di integrazione, cui venivano sottoposte le equazioni differenziali alle derivate parziali, finivano per trovare una funzione, definita in un certo intervallo da un'unica espressione analitica, che non era piú tale nei *punti di raccordo* con un intervallo successivo. In questi punti ovviamente non era piú rispettato il teorema dell'inversione in quanto la funzione non era differenziabile.

[6] Euler ribadisce piú volte questa sua posizione. Direttamente nel clima della polemica sulle corde vibranti (a questo proposito cfr. *Remarques sur les mémoires précédentes de Mr. Bernoulli*, pubblicata dall'Accademia nel 1755 ma stesa circa due anni prima), nelle stesse *Institutiones calculi differentialis* e piú tardi nel suo *De usu functionum discontinuorum in analysi*, pubblicato nel 1765, ora in *Opera Omnia*, cit., ser. I, vol. XXIII. Nel lavoro del 1765 Euler si chiede se debbano essere ammesse legittimamente nel campo dell'indagine matematica quelle curve discontinue che non sono soggette ad alcuna legge formale certa. Dato che vi sono situazioni fisiche concrete rappresentabili da un moto e da figure di un certo tipo

La distinzione implica la separazione netta di due fasi del processo conoscitivo: il momento della *formalizzazione teorica* ed il momento della *descrizione concreta*. La preoccupazione di Euler è quella di assegnare differenti funzioni ai due momenti fondamentali. La formalizzazione teorica, con il suo rigore, sussiste in ragione di un campo di problemi concreti e trova in questa sede la sua giustificazione e la propria ragion d'essere.

Lo stesso Daniel Bernoulli, in una lettera ad Euler, esprime analoghe preoccupazioni. Giudicando la posizione restrittiva di d'Alembert osserva che quest'ultimo può essere considerato degno della massima stima quando affronta problemi di matematica astratta (trattasi di quei problemi che rientrano nello *standard* del rigore dell'epoca), tuttavia si mostra completamente sprovveduto nei confronti di quei problemi fisici concreti che non si lasciano dominare dalle formalizzazioni (di fatto d'Alembert usa la teoria formale come criterio rigido per discriminare ciò che può essere indagato da ciò che non è suscettibile di indagine) e da quest'ultimo punto di vista, conclude un po' provocatoriamente Bernoulli, sarebbe meglio che le stesse formalizzazioni teoriche non esistessero affatto [7].

Di fatto Euler, proprio in relazione alla vicenda delle corde vibranti, definisce il concetto matematico di funzione in ragione di un vero e proprio ritorno alla metafisica leibniziana. Nelle *Institutiones calculi differentialis*, pubblicate nel 1755 cioè circa sette anni dopo la pubblicazione della *Introductio in analysin infinitorum*, il concetto di funzione viene nuovamente fondato sulla intelaiatura logica del movimento: se delle *quantità*, afferma Euler, dipendono da altre in modo tale che dalle mutazioni di queste anche le altre subiscono delle variazioni, esse sono funzioni di queste. In sostanza, data una qualsiasi *quantità variabile*,

(è evidente il riferimento al problema fisico delle corde vibranti) allora, conclude Euler, occorre sforzarsi di considerare le possibili determinazioni matematiche del fenomeno, anche nel caso gli strumenti tecnico-formali per farlo non siano adeguati. Cfr. p. 77 dell'opera citata.

[7] Ci sembra che quanto abbiamo esposto costituisca il succo metodologico di una lettera che Daniel Bernoulli indirizzò ad Euler nel gennaio 1750. Euler si mostrò d'accordo anche se non condivise affatto, da un punto di vista tecnico, l'approccio di Bernoulli che consisteva nel rappresentare la funzione mediante una serie trigonometrica, rilevando la difficoltà di rappresentarne effettivamente i coefficienti. Cfr. *Lettre de Mr. Daniel Bernoulli*, J. Sav. (1758), pp. 157-66.

tutte le quantità che dipendono da detta variazione sono funzioni della quantità variabile.

Lo stesso Euler osserva che questo modo di fondare il concetto di funzione ha un'estensione molto ampia e comprende tutti i possibili modi mediante cui una quantità può essere determinata per mezzo di altre. Questo significa che la formalizzazione della nozione di funzione (sette anni prima, nell'*Introductio,* definita formalmente come espressione analitica) non è in grado di coprire il campo dei possibili oggetti matematici ritenuti *funzioni* [8].

In questo contesto le funzioni continuano ad essere trattate, ove è possibile, come oggetti esprimibili analiticamente (formalmente) ma senza che ciò implichi che ci si debba *a priori* limitare ad esse come ai soli oggetti denominabili funzioni.

Stante questa situazione, secondo Euler, se si vuole fondare la matematica in maniera estensivamente soddisfacente ci si deve affidare a quella stessa prospettiva che Leibniz denotava come fondamenti metafisici della matematica, cioè ad una prospettiva che si caratterizzava come una vera e propria metafisica del movimento.

Con questo, Euler, nel giro di sette anni, tanti sono gli anni che intercorrono tra la data di pubblicazione dell'*Introductio* e quella delle *Institutiones,* e sotto l'evidente influenza del dibattito sulle corde vibranti, capovolge completamente la sua concezione sui fondamenti della matematica: dapprima riteneva che la formalizzazione rigorosa del concetto di funzione potesse costituire una base efficace per sottomettere la matematica ad un unico *standard* di rigore, sette anni dopo ritiene che i fondamenti costituiscano una struttura elastica rappresentata dai problemi concreti su cui portano le concettualizzazioni matematiche. E questo, come abbiamo già detto, segna un vero e proprio ritorno al contesto teorico della metafisica leibniziana.

2.2. *Il recupero del paradosso epistemologico di Nieuwentijt ed il paradosso della continuità.*

La situazione della matematica, dopo il dibattito sulle corde vibranti, si presentava alquanto composita: accanto all'approccio funzio-

[8] Circa il ritorno di Euler alla prospettiva fondazionale del movimento cfr. *Institutiones calculi differentialis,* Impensis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae 1755, ora in *Opera Omnia,* cit., ser. I, vol. X, p. 4 ss.

nale si sviluppò un approccio relazionale, basato sull'*analysis situs*, la cui funzione era quella di riflettere integralmente il concreto della matematica stessa.

La divaricazione epistemologica tra le due prospettive risultava determinata dall'impossibilità, da parte del calcolo simbolico, di padroneggiare globalmente il concreto relazionale. Infatti il dibattito aveva messo in evidenza la necessità di individuare un concetto di continuità concreta in certo qual modo piú estesa rispetto alla nozione di continuità prevista dal formalismo seriale. Come abbiamo visto in precedenza, trattavasi di una continuità in grado di includere situazioni che risultavano discontinue da un punto di vista formale.

In questo senso, pur restando la logica seriale l'unico mezzo tecnico per sottomettere al calcolo le funzioni, si sviluppa una matematica relazionale costituita secondo i canoni dell'*analysis situs* leibniziana.

È ovvio che il recupero della *geometria di posizione*, come logica del concreto, ripropone tutti i problemi epistemologici legati all'impostazione metafisica dello stesso Leibniz, primo fra tutti il problema di definire una corrispondenza delle nozioni di *sezione, limite, traccia*, ecc., con il rigore dell'algebra.

Lo stesso Euler si rende conto del problema e nelle *Institutiones* ripropone la compatibilità della nuova matematica relazionale con la vecchia matematica dell'estensione mediante un principio di corrispondenza che presenta forti analogie con gli analoghi principi di Leibniz.

Euler comincia con l'affermare che l'infinitamente piccolo deve essere ritenuto una *quantità evanescente* per cui il suo valore deve essere *zero*. Dato che lo si definisce *minore di qualsiasi quantità assegnabile* — continua Euler — se non fosse *zero* sarebbe sempre possibile trovare una quantità uguale ad esso (o addirittura minore in virtú dell'assioma di Archimede) per cui ci si troverebbe in una situazione che contraddice l'ipotesi.

Pervenuto ad una simile conclusione, perfettamente in linea con lo *standard* del rigore della teoria delle proporzioni, Euler osserva che il problema consiste ora nello spiegare per quale motivo, nello sviluppo del calcolo differenziale, gli infinitesimi non vengono designati direttamente con lo *zero*, al contrario si usano per essi simboli speciali con un significato proprio.

A detta di Euler occorre operare una distinzione: due sono i modi mediante i quali si possono confrontare le grandezze, uno aritmetico ed uno geometrico. Nel primo si tiene conto della *differenza*, nel secondo del *rapporto*. Per cui non vi è alcuna difficoltà, quando si bada al primo modo di considerare le cose, se si usa direttamente lo *zero*. Tuttavia, nel secondo caso, il problema si presenta in modo differente. Infatti se si considera la proporzione $2 : 1 = 0 : 0$, dato che si bada al *rapporto geometrico*, essendo il primo termine doppio del secondo, il terzo termine deve risultare doppio del quarto. In questo senso la notazione dello *zero* risulterebbe inadeguata ed occorrerebbe trovare una notazione piú soddisfacente che, in qualche modo, renda ragione del *rapporto*. I simboli differenziali verrebbero appunto usati in questa prospettiva [9].

Come si sarà certamente notato, l'uso, fatto da Euler, della teoria delle proporzioni risulta totalmente avulso dall'ambito classico di Eudosso-Euclide-Archimede. In effetti Euler si serve dei riferimenti alla teoria delle proporzioni per costruire un principio che in qualche modo faccia corrispondere ad un limite i due programmi metodologici: da un punto di vista geometrico vi è uno scarto, in quanto i simboli dell'algebra classica non sono in grado di rendere ragione di determinate situazioni, ma da un punto di vista aritmetico i due programmi corrispondono [10].

La situazione presenta forti analogie con quanto viene sostenuto da Leibniz nel manoscritto *Cum prodiisset atque increbuisset* e nella lettera a Dangicourt.

Abbiamo visto in precedenza che, nei due scritti, Leibniz sostiene che una sezione, atta a delimitare completamente una successione di

[9] Euler dedica il terzo capitolo delle *Institutiones*, dal titolo *De infinitis atque infinite parvis*, interamente a questo problema. I passi del terzo capitolo da noi riassunti, relativamente all'edizione di Gerard Kowalewski (Berlino 1913), si trovano a p. 68 ss. Tra l'altro Kowalewski, tre anni prima, aveva raccolto, in *Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen*, lavori dello stesso Euler e dei Bernoulli.

[10] Dobbiamo ricordare che sia il Principio di Leibniz che prefigura una corrispondenza in ragione di una *maggiore o minore complessità delle relazioni*, sia il Principio di Euler che prefigura la corrispondenza in ragione di un *punto di vista geometrico* o *aritmetico*, rappresentano entrambi una risposta classica alla situazione che si crea quando un programma metodologico viene innestato su di un programma preesistente che presenta incompatibilità. Da questo punto di vista la situazione che abbiamo delineato *mutatis mutandis* presenta forti analogie con il celebre *Principio di corrispondenza* di Bohr. Su questo argomento cfr. I. Lakatos, *La falsificazione e la metodologia dei programmi di ricerca scientifici*, in *Critica e crescita della conoscenza*, a cura di Imre Lakatos e Alan Musgrave, trad. it. a cura di Giulio Giorello, Milano 1979.

termini che tende ad avvicinarsi illimitatamente ad un termine fisso, si distingue dallo stesso termine di avvicinamento dal punto di vista della relazione, mentre coincide con quest'ultimo dal punto di vista algebrico dell'estensione; infatti, in virtú del metodo di esaustione, nessun termine della successione si infiltra tra la posizione, rappresentata dalla sezione, e quella rappresentata dal termine ultimo.

Il che significa che viene usata l'identità, cosí come viene definita nella teoria delle proporzioni, per stabilire una corrispondenza tra le due prospettive: in un certo ambito si ha la non identità, oltre questo ambito si ha identità [11].

Euler, nelle *Institutiones*, enuncia il suo principio di corrispondenza in maniera analoga all'impostazione leibniziana, ed assume il punto di vista geometrico ed aritmetico come riferimenti in ragione dei quali si stabilisce una coesistenza tra l'identità e la non identità.

Con il recupero dell'*analysis situs* non soltanto si ripropone il problema di enunciare corrispondenze tra punti di vista o paradigmi sostanzialmente eterogenei ma rimane inalterato il fatto di non riuscire piú a giustificare le nozioni, legate al problema della posizione, mediante la logica tradizionale di tipo *genere* e *specie*. È evidente che una nozione, quale quella di sezione, non può essere giustificata e fondata su procedure tradizionali di analisi logica. La sezione non rappresenta semplicemente una parte ottenibile concretamente per scomposizione di un oggetto, piuttosto rappresenta il ricorso ad un punto di vista esterno che in qualche modo sopprime ogni determinazione dell'oggetto legata all'estensione.

Da questo punto di vista si ripropongono inalterati i termini che avevano caratterizzato il paradosso epistemologico di Nieuwentijt, circa la soppressione della distinguibilità tra *retto* e *curvo*.

[11] Nel capitolo precedente abbiamo mostrato la differente struttura del principio di corrispondenza che Leibniz usa sia nel manoscritto *Cum prodiisset atque increbuisset* sia nella lettera a Dangicourt rispetto a quello formulato negli *Initia rerum mathematicarum metaphysica.* In quest'ultimo lavoro Leibniz interpreta l'intiero campo della matematica dal punto di vista della relazione e la corrispondenza si struttura in virtú di un principio di *maggiore o minore complessità* della relazione stessa; le relazioni meno complesse coinciderebbero con l'estensione. Al contrario nel manoscritto *Cum prodiisset atque increbuisset* il campo della relazione ed il campo dell'estensione sono posti l'uno accanto all'altro e la corrispondenza si struttura in virtú di un principio di identità e non identità a seconda della variazione dei punti di vista.

Euler già nelle *Réflexions* aveva usato il paradosso a proposito della meccanica. La posizione di un corpo, afferma lo stesso Euler, non può essere ottenuta semplicemente scomponendo le caratteristiche del corpo legate alla sua estensione, infatti la *posizione* implica la soppressione del corpo nella sua totalità.

È la situazione classica dell'obiezione che Nieuwentijt aveva rivolto a Leibniz piú di mezzo secolo prima. Con la pubblicazione dell'*Introductio*, caratterizzata dal suo approccio funzionale, pareva che l'enigma fosse destinato a restare confinato esclusivamente nell'ambito della meccanica, ma il dibattito sulle corde vibranti ed il conseguente ritorno all'approccio relazionale, lo ripropongono inalterato anche nelle scienze matematiche.

Infatti Euler nel terzo capitolo delle *Institutiones*, titolato *De infinitis atque infinite parvis*, nonché nelle parti dedicate alla divisibilità infinita, riprende le stesse considerazioni, svolte anni prima nelle *Réflexions*, riattualizzando il paradosso epistemologico di Nieuwentijt relativamente alla logica relazionale della sezione quindi, in generale, della posizione [12].

Il paradosso implicava il fatto di dover rendere ragione di un processo, caratterizzato come soppressione del concreto, che finiva per costruire una concretezza addirittura piú concreta rispetto a quella che era stata precedentemente soppressa. Ma mentre Nieuwentijt considera l'enigma un paradosso vizioso, l'indistinguibilità di retto e curvo di per se stessa è il segno di un grave inconveniente logico, Euler lo considera fondamentale nel processo conoscitivo e gli attribuisce una stringenza empirica a tutti gli effetti: l'emergere del punto di vista relazionale risulta sempre connesso alla soppressione delle determinazioni legate all'estensione [13].

Che il paradosso della soppressione del concreto costituisse un enigma scientificamente produttivo lo dimostrano le applicazioni dell'*analysis situs* al problema della continuità.

Infatti l'applicazione delle nozioni relazionali al problema di defi-

[12] Cfr. *Institutiones calculi differentialis*, cit., p. 70 ss.

[13] Relativamente alle parti che abbiamo trattato cfr. *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita*, cit., soprattutto al cap. I, par. 2 ss., al cap. II, par. 77 ss. e cap. III, par. 128. In quest'ultimo Euler afferma esplicitamente che il fatto di non riuscire a corredare di una spiegazione logica l'enigma, non autorizza a considerare priva di senso l'attività scientifica ad esso collegata, cioè non autorizza affatto a considerare priva di senso la prospettiva relazionale.

nire una continuità concreta, in grado di inglobare e sopportare i punti di discontinuità evidenziati dall'approccio funzionale, presuppone un ulteriore paradosso logico.

L'uso della nozione leibniziana di sezione, lungo questa prospettiva, presupponeva il fatto di porre la stessa discontinuità alla base del nuovo concetto di continuità e questo fatto, giudicato dal punto di vista della logica estensionale dell'epoca, implicava un vero e proprio e n i g m a per certi versi analogo al paradosso della soppressione.

Boscovich è indotto ad imboccare una strada di questo tipo studiando i fenomeni fisici dell'urto.

Immaginiamo ad esempio che due masse uguali, dotate di differenti velocità, si muovano l'una contro l'altra. Al momento dell'urto, in maniera del tutto repentina ed improvvisa, una data quantità di moto passerà dal corpo piú veloce a quello piú lento, quindi entrambi continueranno a progredire con le loro velocità modificate dal fenomeno stesso.

Le spiegazioni tradizionali basate sulla teoria dell'urto, osserva Boscovich, finiscono per derogare completamente dal principio di continuità di Leibniz, infatti quest'ultimo esige che ogni grandezza nel passare da un valore ad un altro percorra tutte le fasi intermedie, qui al contrario la variazione della velocità è improvvisa (è determinata dall'urto) e non ammette fasi intermedie [14].

Boscovich ritiene sostanzialmente che sia possibile ripristinare la prospettiva della continuità sfruttando la teoria della *actio in distans* di Newton e la teoria della sezione di Leibniz.

Sul tema della *actio in distans* Boscovich costruisce un primo abbozzo della continuità che non differisce sostanzialmente dai canoni newtoniani.

Si suppone che la velocità non si modifichi in modo discontinuo al momento dell'urto, ma che già prima, durante il moto di avvicinamento, avvenga un mutamento continuo della velocità.

In tal modo la *actio in distans* permette a Boscovich di impostare, sia nei confronti del moto di avvicinamento sia nei confronti della curva che rappresenta la variazione della velocità, la stessa idea di variazione presente nel concetto newtoniano di *fluente* e di *flussione*.

Quindi, sino a questo punto, non vi è alcuna rottura nei confronti

[14] Cfr. R. G. Boscovich, *Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, Wien 1758, 2ª ediz. Venetiis 1763.

del modo tradizionale di intendere la continuità matematica, anzi l'intento è proprio quello di ripristinarla. Il vero e proprio problema, sempre secondo Boscovich, si pone nella misura in cui si passa a rendere compatibile questa idea di fondo con uno studio fisico effettivo. Infatti, da quest'ultimo punto di vista, occorre introdurre l'azione di due forze antagoniste: quella attrattiva e quella repulsiva. Quindi occorre precisare il loro campo d'azione in modo che, non appena la distanza tra i due corpi sia minore di una grandezza data, entrino in azione le forze repulsive. In sostanza quando i due corpi si trovano ad una certa distanza dovrebbero prevalere le forze attrattive, diminuendo la distanza dovrebbero prevalere le forze repulsive, le quali ultime dovrebbero crescere infinitamente mano a mano che diminuisce ulteriormente la distanza stessa [15].

Quel che risulta peculiare nel modello di Boscovich è che l'infinitesimalizzazione del fenomeno dell'urto implica l'identificazione, sulla eventuale traiettoria del movimento, di punti cruciali che dovrebbero rappresentare altrettanti mutamenti di equilibrio delle forze in azione.

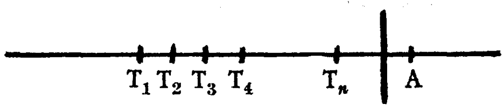
Questo aspetto costituisce il cardine centrale della cosiddetta teoria dei punti semplici di forza che, presso Boscovich, implica una vera e propria riconsiderazione del concetto tradizionale di continuità, in modo da farlo aderire al modello costruito sulla base dei centri isolati di attività.

Il motivo è molto semplice. Se i punti cruciali individuano ben determinati *tratti* della curva, è altrettanto vero che la loro posizione risulta abbastanza *sui generis*. Ad esempio uno di questi punti potrebbe separare due precisi tratti della traiettoria: il primo in cui prevale la forza attrattiva, il secondo in cui diventa cruciale la forza repulsiva. In questo caso il punto non fa altro che separare due tratti caratterizzati qualitativamente in maniera diversa, paradossalmente senza appartenere all'uno o all'altro dei due tratti in oggetto. *Mutatis mutandis* si ha una situazione analoga a quella rappresentata dai *punti angolosi* evidenziati dal problema delle corde vibranti.

Qui interviene l'altro aspetto della riflessione di Boscovich: quello ispirato direttamente al concetto leibniziano di sezione. La prospettiva è di servirsi di un concetto di tal fatta per costruire una nozione di continuità in grado di contemplare punti di discontinuità.

15 Cfr. ivi, par. 81 ss.

Come abbiamo già avuto modo di dire, l'idea leibniziana si basava su di un fatto estremamente semplice: se abbiamo una successione di valori che si avvicina ad un termine ultimo, è possibile tracciare una sorta di cesura in grado di delimitare la successione ed in modo che detta cesura non coincida con il termine cui la successione stessa si avvicina illimitatamente.



Abbiamo visto che su questa idea, presso Leibniz, si fondavano i differenziali. Inoltre vi è contenuta una importante caratterizzazione del concetto di continuità: il cosiddetto *termine ultimo* in realtà non rappresenta un *termine* della *successione* (costituisce, per cosí dire, un punto di riferimento esterno) solo la sezione costituisce un limite effettivo, come tale ha la prerogativa di conservare le relazioni tipiche del sistema di valore T_1, T_2, T_3, T_4 ... T_n ...

Boscovich, ispirandosi a questo tipo di impostazione, ritiene che un punto semplice di forza rappresenti in certo qual modo quello che per Leibniz era il termine cui la successione si avvicinava illimitatamente. Come tale è destinato ad individuare un tratto, relativo alla traiettoria, che procede verso di lui ed un tratto successivo che procede a partire da lui.

Se vogliamo limitare effettivamente i due tratti dobbiamo affidarci evidentemente a due sezioni tracciate rispettivamente alla sinistra ed alla destra del punto in oggetto che, come tale, non appartiene né all'uno né all'altro tratto.

In questo senso il punto rappresenta un elemento di discontinuità interposto tra i due tratti della curva. Ciò malgrado ha una importante prerogativa: quella di permettere l'*individuazione di tratti continui*.

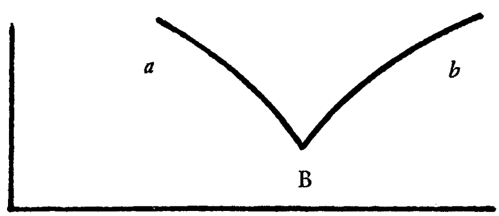
Da questo punto di vista, secondo Boscovich, occorrerebbe abbandonare l'idea intuitiva che i matematici si sono fatti della continuità. Il presupposto fondamentale era infatti la possibilità, in linea di principio, dell'individuazione di un punto spaziale prossimo, basandosi sulla ulteriore certezza che questo requisito fosse formalmente tutelato dal fatto che la funzione (con la caratteristica della continuità) risulta sempre rappresentabile da un'unica espressione analitica. Ma era precisamente questa certezza che era andata in crisi con il dibattito sulle corde vibranti. Il fatto di ritenere che una funzione, rappresentabile da una data espressione in un dato tratto, mantenesse questa caratteristica in tutto il suo *dominio* non permetteva di capire che il requisito intuitivo della continuità non era sufficiente per stabilire la continuità stessa.

La conseguenza, relativamente ai criteri dell'epoca, era che due punti considerati continui potevano benissimo essere discontinui.

L'obiettivo di Boscovich era appunto quello di costruire una continuità che contemplasse questa possibilità; trattasi di una continuità che reggendosi su *punti discontinui* si risolveva in una continuità *a tratti.*

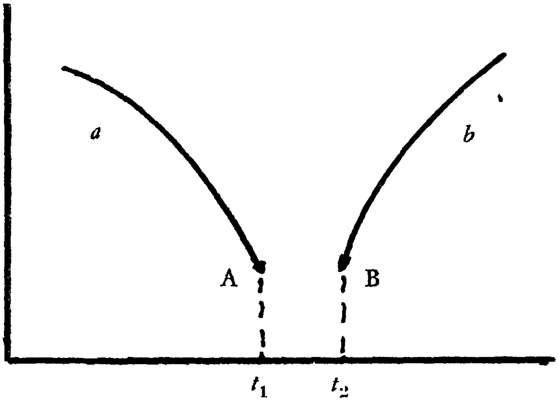
In sostanza Boscovich fa valere una convinzione analoga a quella espressa da Euler posteriormente al 1748: cosí come Euler riteneva che il modo concreto di intendere le *funzioni* fosse piú esteso rispetto a quello rappresentato dalla formalizzazione matematica, cosí Boscovich ritiene che un approccio concreto alla continuità abbia una stringenza superiore nei confronti dell'approccio formale.

Ad esempio si può dire che la continuità, rispetto all'intera traiettoria, rappresenta semplicemente l'esigenza che ad ogni istante t_1 corrisponda una ed una sola posizione di un ipotetico mobile. Resta da sé che, in un eventuale punto cruciale, viene mantenuto il requisito complessivo della continuità pur presentandosi una discontinuità rispetto alla variazione della direzione del movimento.



In B non si ha la variazione di direzione in quanto rappresenta un punto angoloso. Detta variazione si presenta solo in relazione alla sezione tracciata alla destra od alla sinistra del punto.

Con questo si ha la possibilità di distinguere ulteriormente tra la discontinuità (in quanto condizione di una continuità *a tratti*) e la discontinuità nel senso usuale. Ad esempio se immaginiamo che un movimento sia interrotto all'istante t_1 nel luogo A per riprendere all'istante t_2 nel luogo B, abbiamo che nel tratto di tempo $t_1 \dots t_2$ non è possibile stabilire alcuna posizione univoca e certa del mobile; quindi si può concludere che la traiettoria è discontinua nel senso usuale del termine.



Ma se esaminiamo il primo caso, relativo alla prima figura, possiamo osservare che il punto di discontinuità B permette di tracciare due *sezioni* che individuano alla sua destra ed alla sua sinistra *tratti* continui che, di per se stessi, sono sufficienti per stabilire in concreto la continuità. E quest'ultimo aspetto non risultava affatto dominabile dall'approccio funzionale basato sul formalismo seriale [16].

Per quanto la situazione potesse apparire paradossale, secondo i canoni della logica estensionale dell'epoca, permetteva di fondare un concetto di *continuità a tratti* in grado di spiegare il comportamento di quelle funzioni atipiche, ottenute per integrazione di equazioni differenziali *alle derivate parziali*, messe in evidenza dal dibattito sulle corde vibranti.

Da un punto di vista epistemologico sono evidenti le analogie con il problema della soppressione, cosí come era stato enunciato da Euler a proposito della logica relazionale della posizione. Anche nel caso di Boscovich, infatti, la correlatività di termini quali *continuo* e *discontinuo* sopprime la loro distinguibilità in quanto caratteri estensionalmente determinati. In sostanza si ripropone in entrambi i casi il paradosso dell'indistinguibilità tra *retto* e *curvo* già messo in evidenza da Nieuwentijt.

Quindi, dopo il dibattito sulle corde vibranti, il recupero delle nozioni relazionali, tipiche della metafisica leibniziana, apre una prospettiva epistemologica caratterizzata dal fatto di rendere virtuosi detti paradossi.

Non soltanto vengono riattualizzati principi di corrispondenza sul

[16] Cfr. ivi, parr. 30-33 e 90.

tipo di quello formulato da Leibniz nel manoscritto *Cum prodiisset atque increbuisset*, ma altresí prende corpo, all'interno della matematica, una teoria della conoscenza fondata su altrettanti e n i g m i , destinati, questi ultimi, ad estendersi ed a coinvolgere altri temi lungo tutto il prosieguo della seconda metà del secolo.

CAPITOLO III

LA DIFFUSIONE SUL CONTINENTE EUROPEO DELLA TEORIA DEI LIMITI

3.1. *La nuova Geometria di Newton.*

Newton ritiene che il nuovo calcolo flussionale risulti completamente fondato sulla geometria del moto. Da questo punto di vista la nuova geometria assume l'aspetto di una sorta di superscienza in grado di riflettere globalmente i caratteri piú concreti del moto: quelli relativi alla sua misurazione.

Ritiene parimenti che l'attribuire una simile funzione alla geometria consista semplicemente in uno sviluppo della stessa intuizione fondamentale, già fatta valere da Descartes, nei confronti dell'*algebra speciosa* di Viète, quindi in una ulteriore estensione del problema matematico dell'omogeneità ai nuovi temi, cioè a quelli della variazione istantanea [1].

[1] François Viète nella sua opera fondamentale *In artem analytican isagoge* (1951), elabora un vero e proprio linguaggio algebrico fondato sull'omogeneità euclidea. L'uso dei coefficienti numerici specifici, e l'uso del linguaggio comune per designare i simboli (ad esempio la parola *cosa* per denotare l'incognita) avevano impedito, prima di allora, la discussione generale dei problemi algebrici. Il simbolismo di Viète permetteva una notevole generalizzazione in cui le lettere dell'alfabeto esprimevano i *coefficienti*, i segni « + » e « — » venivano usati nel nostro senso attuale, e cosí via. In tal modo l'algebra assurge ad una forma per cosí dire adulta e nel contempo si ancora saldamente ai principi della omogeneità e della continuità greca: il prodotto di due segmenti era ritenuto necessariamente un'area, mentre i segmenti stessi potevano essere addizionati esclusivamente a segmenti, le aree ad aree ed i volumi ai volumi.

Su questi argomenti cfr. F. Viète, *Opera mathematica*, Leyden 1646; ristampa

Il programma di Descartes consisteva nella ricerca di un metodo generale di pensiero che fungesse da paradigma scientifico sicuro nella ricerca. Dato che la meccanica possedeva un qualche grado di coerenza sistematica in virtú della sua schematizzabilità geometrica, allora la geometria stessa poteva ritenersi un efficace mezzo per costruire dei modelli scientifici. Partendo da questo presupposto, se si fosse riusciti a creare le condizioni di una efficace applicabilità dell'algebra allo studio dei problemi geometrici, certamente si sarebbe pervenuti ad un potente mezzo per la matematizzazione delle scienze naturali, ottenendo la possibilità di una comprensione unitaria dell'universo.

In tal modo Descartes crea le basi per una traduzione dei concetti geometrici, quali ad esempio il punto, la retta, il piano, incluse le relazioni intercorrenti tra essi, nei termini dell'algebra: si tratta di portare il campo della geometria classica nel raggio d'azione degli algebristi. Descartes ritiene di avere segnato una tappa del tutto nuova rispetto alla matematica greca; quest'ultima infatti si limitava a dare soluzioni circoscritte e con criteri di validità caso per caso. Rendendo compatibile l'algebra con la geometria, la matematica possedeva un paradigma unitario senza ulteriori limitazioni [2].

corredata da una bibliografia a cura di J. E. Hofmann, Hildesheim, New York 1970. Circ al'algebra di Viète e la sua generalizzazione simbolica fondata sul principio greco di omogeneità cfr. J. E. Hofmann, *Über Viète's Beiträge zur Geometrie der Einschiebung*, « Math.-Phys. Semesterberichte » VIII (1962), pp. 191-214; inoltre I. G. Bachmakova - E. I. Slavutin, "*Genesis Triangulorum*" *de Viète et ses recherches dans l'analyse indéterminée*, « Archive for History of Exacte Sciences » 16 (1977), pp. 289-306.

[2] Su questo punto Descartes ebbe, a partire dal 1637, una violenta polemica con Pierre de Fermat. Quest'ultimo indubbiamente è da ritenersi piú vicino alla nostra moderna concezione della geometria analitica (salvo il fatto di usare una notazione, ancora legata alla *Logistica speciosa* di Viète, senz'altro piú arcaica). La tesi di Fermat sostiene che non si era affatto verificata una vera e propria rottura con il passato, ma soltanto non si era fatto altro che applicare la procedura ben sviluppata dell'algebra del XVI secolo alle tecniche degli antichi. Ad esempio già nelle *sezioni coniche* di Apollonio si trovano molti dei metodi che ora la geometria analitica utilizza in maniera sistematica (Apollonio conosceva già una caratterizzazione delle *sezioni coniche* per mezzo di quelle che noi oggi chiamiamo *coordinate*, anche se non vi attribuiva alcun valore numerico). Né la validità del principio di usare l'algebra come canone di spiegazione della geometria — sempre secondo Fermat — poteva essere stabilita metafisicamente *a priori*, al contrario risulta provata solo in ragione degli eventuali successi nella soluzione di quei problemi specifici che i metodi classici non riuscivano a risolvere.

Circa questo aspetto del pensiero di Fermat cfr. A. Machabey, *La philosophie de Pierre de Fermat*, Liegi 1949 e *Pierre Fermat*, Basilea 1950; J. E. Hofmann, Per compiere questo passo Descartes dovette, in primo luogo, prendere le distanze dal principio greco di omogeneità, accettato fino ad allora dagli algebristi.

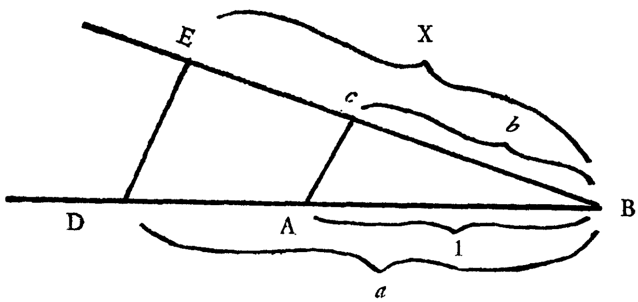
Presso l'algebra di Viète, una quantità algebrica ab (una volta interpretati rispettivamente a e b come lunghezze di segmenti) doveva essere interpretata necessariamente come l'area di un rettangolo.

Ciò significava che il risultato dell'interpretazione (area di un rettangolo) rappresentava qualcosa di non confrontabile con a e b presi singolarmente: espressioni come $a \cdot b - b$ erano ritenute senza significato geometrico, quindi senza significato algebrico in quanto $a \cdot b$ risultava inconfrontabile con b.

È noto che il primo libro della *Géometrie* inizia dimostrando la possibilità di ridurre tutte le quantità geometriche, tipo aree, volumi, etc., a semplici quantità lineari, cioè a quelle quantità per mezzo delle quali è possibile la costruzione delle aree e dei volumi [3].

Per far questo Descartes si basa su di una caratteristica precisa della teoria delle proporzioni: quella di avere un grado di generalità che esorbita dai problemi geometrici trattati negli *Elementi*, quindi un grado di generalità decisamente piú estesa rispetto allo stesso principio greco di omogeneità.

Per esemplificare la situazione seguiamo il criterio mediante il quale Descartes riduce l'espressione $a \cdot b$ ad una prospettiva lineare.



Sia AB preso come unità, e si richieda di moltiplicare BD per BC. Dopo aver congiunto i punti A e C si tracci per D la parallela ad AC

Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Eulers, ihre Zusammenhänge und ihre Bedeutung « Archive for History of exact sciences » (1961).

[3] Cfr. Descartes, *La Géométrie*, in *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences ... Plus la Dioptrique, les Météores, et la Géométrie*, Maire, Leyden 1637, p. 297.

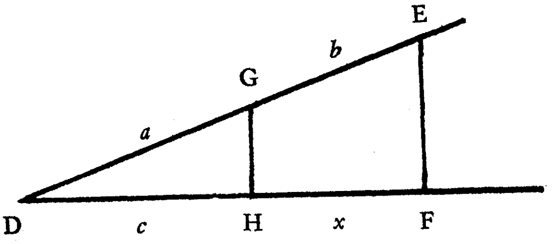
che incontrerà il prolungamento di BC nel punto E. Posto AB $= 1$, BD $= a$ e BC $= b$, si tratta di trovare il segmento corrispondente al prodotto ab. Infatti dalla proporzione AB : BD = BC : BE si ottiene $1 : a = b :$ BE, cioè appunto $ab =$ BE[4].

Come si può notare Descartes utilizza sostanzialmente il teorema euclideo sulla quarta proporzionale di tre grandezze date (nella *Géometrie* le tre grandezze date sono rispettivamente 1, a e b). L'unica differenza tra le due prospettive consiste nel fatto che Euclide costruisce la quarta proporzionale servendosi del suo precedente teorema circa la proporzione che si stabilisce tra le porzioni dei lati di un triangolo tagliati da una parallela alla base, al contrario Descartes costruisce la quarta proporzionale servendosi del teorema, sempre euclideo, sulla proporzione esistente tra i lati di due triangoli aventi rispettivamente gli angoli uguali[5].

[4] Cfr. ivi, p. 298 ss.

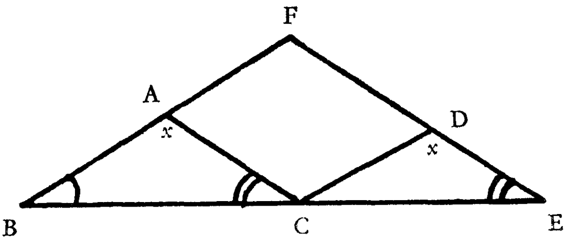
[5] È facile verificare quanto abbiamo detto se si dà uno sguardo al teorema euclideo sulla *quarta proporzionale.*

La proporzione da cui parte Euclide è $a : b = c : x$ che è stata precedentemente dimostrata da Euclide a proposito della parallela (in questo caso rappresentata da HG) alla base del triangolo (rappresentata da EF).



Descartes al contrario utilizza per la sua costruzione la *Proposizione quarta* sempre del Libro VI.

Nella dimostrazione di questo teorema Euclide perviene alla proporzione BA : AF = BC : CE.



Se applichiamo la *Definizione XIII* del Libro V otteniamo AF : BA = CE : BC.

Da quanto abbiamo potuto vedere la procedura di riduzione di Descartes non esce affatto dall'ambito teorico della teoria delle proporzioni [6].

Tuttavia, su questa base, risulta possibile interpretare le grandezze geometriche in modo affatto omogeneo; cioè a dire dal punto di vista accomunante delle loro generazioni: il moto di un punto genera una retta, il moto di una retta genera una superficie e cosí via [7].

Newton nel suo *De quadratura curvarum* (1704) riprende una analoga concezione generativa.

Dato che il moto di un punto può generare una retta piú o meno rapidamente è possibile innestare sul programma di Descartes una vera

Quindi, dato che i triangoli ABC e CDE hanno gli angoli rispettivamente uguali, si ricava immediatamente CD : BA = CE : BC che è appunto la proporzione utilizzata da Descartes.

In sostanza Descartes utilizza la *Proposizione quarta* del Libro VI e la *Definizione XIII* del Libro V.

6 Euclide introduce il termine *omogeneità* relativamente alla *terza Definizione* del Libro V degli *Elementi* ed il termine stesso può essere considerato come un concetto primitivo investito di un significato storicamente tramandato dalla geometria pre-euclidea. Quest'ultima, assai prima di Euclide, mostrò la sua tendenza a svincolarsi dalla teoria delle proporzioni, e lo stesso Euclide, per quanto gli è possibile, conserva questa tradizione e tenta di ritardare l'introduzione della teoria stessa. Quando Euclide nel Libro V passa senz'altro alla sua introduzione rigorosa, lo fa conservando inalterata la presa intuitiva immediata che il termine omogeneità aveva nella geometria tradizionale.

Per questi motivi viene a crearsi una sorta di sbilanciamento tra il modo usuale di intendere l'omogeneità e la potenzialità astrattiva della teoria delle proporzioni. Se noi interpretiamo l'omogeneità come termine primitivo della teoria delle proporzioni, abbiamo la possibilità di ricavarne la sua definizione implicita dalla serie di *Definizioni* del Libro V (si tratta di *postulati* nel nostro senso attuale) le quali ultime non restringono affatto il suo significato all'interpretazione tradizionale ed anzi ammettono senz'altro la possibilità di un'interpretazione omogenea ad esempio delle espressioni ab ed a.

In sostanza Descartes non fa altro che sfruttare la potenzialità astrattiva della teoria delle proporzioni (eccedente i problemi geometrici specifici cui Euclide la applica) per ottenere la riduzione e la interpretabilità in termini lineari di espressioni del tipo a^2, a/b, ab, etc. Il tutto utilizzando le costruzioni del Libro VI (fondato, come è noto, sulla teoria delle proporzioni).

7 Circa il valore storico della *Géométrie* di Descartes, nonché l'importanza del suo rapporto con la *metafisica*, rimandiamo ai seguenti lavori: G. Loria, *Descartes géomètre*, « Revue de métaphysique et de morale » (1937); J. O. Fleckenstein, *Cartesische Erkenntnistheorie und mathematische Physik des XVII Jahrhunderts*, « Gesnerus » (1950); J. Vuillemin, *Mathématiques et métaphysiques chez Descartes*, Parigi 1960; J. L. Allard, *Le mathématisme de Descartes*, Ottawa 1963.

e propria scienza del tempo. Cioè una scienza che ha come proprio oggetto le variazioni delle velocità che generano.

Le fluenti dovrebbero rappresentare le quantità generate mentre le flussioni dovrebbero rappresentare i tassi di variazione delle stesse velocità di generazione [8].

Newton ritiene che il nuovo concetto di flussione possa essere fondato efficacemente sulla nuova geometria generativa basata sul moto.

In questo contesto si situa il cosiddetto metodo delle prime e ultime ragioni. Qui Newton enuncia la celebre definizione secondo cui le *ultime ragioni* per mezzo delle quali le *quantità* si annullano non sono *rapporti di ultime quantità* bensí *limiti* cui i rapporti delle *quantità decrescenti* si avvicinano illimitatamente.

La definizione si basa strettamente sul concetto di variazione. Non essendo in gioco alcuna grandezza finita ma unicamente un moto di avvicinamento si tratta solo di stabilire se il processo, e non una grandezza, obbedisce ai requisiti dell'assioma di Archimede e della proprietà di esaustione. E questo requisito viene rispettato nella misura in cui il moto di avvicinamento è in grado di approssimarsi al suo termine in maniera tale che una qualsiasi eventuale differenza può risultare minore di una qualsiasi grandezza assegnata [9].

In questi termini la nuova prospettiva può rientrare senza difficoltà nei canoni di spiegazione segnati dalla nuova geometria generativa, quindi nel rispetto dell'assioma di Archimede e della proprietà di esaustione. Tuttavia il concetto di *ultimo rapporto* contiene un equivoco di fondo.

[8] Il *De quadratura curvarum* era già stato scritto in buona parte nel 1676. Successivamente era stato pubblicato come trattato autonomo nell'edizione latina dell'*Algebra* di Wallis, apparsa nel 1693 (l'edizione inglese era uscita nel 1685). Successivamente il *De quadratura* fu pubblicato nuovamente nel 1704 come appendice all'*Opticks*. Le modifiche apportate lungo tutto l'arco di tempo che va dal 1676 al 1704 tengono conto ovviamente della pubblicazione dei *Principia* avvenuta nel 1687. Sono ovvie le influenze dei due scritti precedenti: *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* del 1669 e del *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*, scritto nel 1671. In sostanza si trattava di affinare progressivamente il *metodo delle flussioni* di cui appunto l'edizione definitiva del 1704 rappresenta la versione matura. I passi di Newton cui ci siamo riferiti sono relativi all'*Introductio* dell'edizione dell'*Opticks*, nuova rispetto all'edizione wallisiana.

[9] Il metodo delle *prime e ultime ragioni* appare già nella prima edizione dei *Principia* (1687), ma è soprattutto nella seconda edizione del 1713 che il *metodo* viene inserito in un contesto fondazionale piú attento a dirimere gli equivoci generati dalle nozioni di *flussione* e di *momento*. Cfr. *Principia*, cit., Libro I, *scolio* al Lemma XII.

Se lo si intende come rapporto di *momenti* (differenziali) si ripropongono tutti gli equivoci degli infinitesimi, se invece lo si intende come rapporto di *flussioni* si ottiene è vero una efficace prospettiva fondazionale ma non si riesce a rendere ragione della funzione euristica che i *momenti* ebbero in relazione alla nuova scoperta [10].

Newton ritiene che l'equivoco possa essere superato precisando ulteriormente che gli ultimi rapporti non sono calcolati prima che le grandezze si annullino e non sono calcolati dopo che le grandezze si sono annullate, bensí rappresenterebbero i rapporti mediante cui le stesse grandezze si annullano. Con ciò si sarebbero dovuti eliminare gli equivoci ingenerati dai *momenti* riconducendo la situazione all'analoga prospettiva della geometria generativa di Descartes [11].

Su questa base Newton ritiene che non si presentino difficoltà epistemologiche relativamente agli *ultimi rapporti*. Una qualsiasi grandezza risulterebbe corredata da due fondamentali relazioni: la relazione che la genera e la relazione che la fa sparire. Il suo ragionamento può essere esemplificato in questo modo: se un dato incremento risulta generato dal moto di un punto la cui posizione iniziale è rappresentata da una relazione, allora l'annullamento dello stesso incremento sarà determinato da una sorta di moto di ritorno che lo stesso punto effettua all'indietro. In questo secondo caso il moto del punto finisce per individuare una *posizione* (trattasi sempre di una relazione) che, pur non identificandosi con la posizione generatrice, determinerà la relazione mediante la quale l'incremento si annulla.

Con ciò si ritiene che il problema degli *ultimi rapporti* non sia affatto dissimile dai *primi rapporti*, già considerati nella *Géometrie* di

[10] Newton viene via via modificando l'esposizione del suo metodo delle flussioni. E questo fatto testimonia delle difficoltà epistemologiche incontrate circa la distinzione concettuale relativa alle nozioni rispettivamente di *momento* e di *flussione*.

Newton si propone di chiarificare la situazione con il suo metodo delle *prime e ultime ragioni*. Ma ancora nel 1713 mantiene un certo equivoco: ragiona come se gli *ultimi rapporti* siano costituiti da *rapporti di flussioni* quando tratta la materia da un punto di vista fondazionale, al contrario, li considera *rapporti di momenti* quando affronta il problema da un punto di vista euristico. Su questi argomenti cfr. F. Cajori, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain, from Newton to Woodhouse*, London 1919. Circa i problemi euristici relativi alla scoperta del calcolo infinitesimale cfr. C. B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York 1959, soprattutto capp. I e II.

[11] Confronta ancora *Principia*, cit., Libro I, *scolio* al Lemma XI.

Descartes. Cosí come il moto di generazione di una retta implica un rapporto iniziale senza che si infranga il rigore euclideo-archimedeo, cosí un ipotetico moto di ritorno, tendente ad annullare la retta stessa, dovrebbe identificare una sorta di contro-rapporto mediante cui si annulla quello che è stato generato ed in maniera tale che il nuovo rapporto non si identifichi con nessuna posizione sulla retta né tanto meno con il rapporto generatore.

Newton ritiene che la dizione *non prima* e *non dopo* possa riflettere efficacemente questa prerogativa. Ma con ciò risulta implicita la possibile identificazione di una posizione che nello stesso tempo delimiti completamente il moto di progressivo ed illimitato avvicinamento, pur senza identificarsi con lo stesso termine cui il moto si avvicina progressivamente.

Come si può notare, in questo caso, Newton si scosta radicalmente dalla teoria dei limiti, enunciata prima, ed assume una posizione che presenta piuttosto forti analogie con l'*analysis situs* leibniziana o con la successiva teoria dell'urto di Boscovich. E questo con tutti i problemi di deroga dal rigore eudossiano-archimedeo.

3.2. *Il perfezionamento della teoria dei limiti.*

La duplicità della giustificazione newtoniana la rende vulnerabile al paradosso epistemologico di Nieuwentijt. Infatti Berkeley nel *The Analyst* (1734), sotto l'influsso del dibattito Leibniz-Nieuwentijt, accomuna i differenziali di Leibniz ed i *momenti* di Newton ad una stessa critica: entrambi sarebbero suscettibili di rientrare nel paradosso dell'indistinguibilità di *retto* e *curvo* [12].

Colin MacLaurin nel suo *Treatise of Fluxions*, originariamente concepito come una replica a Berkeley, si propone di perfezionare la teoria dei limiti di Newton, liberandola dagli equivoci del *non prima* e *non dopo*, in modo che sia suscettibile di rientrare in una prospettiva geometrica completamente assiomatizzabile sul modello euclideo.

MacLaurin, per cominciare, mette a punto una logica di applicabi-

[12] Berkeley comunque ha una posizione che si discosta notevolmente da Nieuwentijt. Mentre quest'ultimo rifiuta esclusivamente i differenziali di ordine superiore, il vescovo irlandese ritiene logicamente illegittimi i differenziali *tout court*. Cfr. G. Berkeley, *The Analyst; or a Discourse addressed to an Infidel Mathemacian*, London 1734.

lità della proprietà di esaustione in modo da renderla adeguata alla nuova geometria generativa. E questo rovesciando completamente le fasi della sua applicazione.

Il punto cruciale, nell'impostazione classica, consisteva nell'applicare direttamente il requisito di esaustione alle grandezze: data una certa grandezza, per verificare la sua proprietà di essere archimedea, occorreva accertarsi della possibilità, in linea di principio, di ottenere una grandezza minore.

Presso MacLaurin il criterio di applicabilità viene rovesciato: si postula una grandezza finita, per cosí dire, esterna al problema, quindi, sfruttando la proprietà di esaustione in ragione della quale dinnanzi al piccolo vi è un ancor piú piccolo, viene affermato che il moto di avvicinamento obbedisce a questo requisito; quindi ha la possibilità di avvicinarsi al suo termine in modo tale che lo scarto possa comunque essere minore della grandezza fissata.

In tal modo la teoria dei limiti di Newton viene rigorosamente fondata su questa nuova edizione della proprietà di esaustione. Quindi l'intiera procedura viene intesa come il risultato di una geometria sintetica, basata su pochi principi evidenti e di tipo generativo, completamente all'interno del rigore euclideo-archimedeo.

Relativamente al paradosso dell'indistinguibilità tra retto e curvo, diretto contro le metodologie del *raddoppiamento della secante*, Mac Laurin osserva che anche queste procedure sono suscettibili di rientrare integralmente nella teoria dei limiti senza presentare gli equivoci del *non prima* e *non dopo*.

Ad esempio, osserva il matematico scozzese, un cerchio non è un poligono di infiniti lati ma un limite che separa la successione dei poligoni iscritti da quelli circoscritti; quindi, in questo contesto, il cerchio rappresenterebbe un puro punto di riferimento ideale che permette di distinguere due processi di avvicinamento: quello determinato appunto dalla successione dei poligoni iscritti e quello determinato dalla successione dei poligoni circoscritti. Il problema consiste nell'accertare se il moto di avvicinamento obbedisce al requisito della proprietà di esaustione; e dato che ciò avviene significa che la situazione rientra perfettamente nei canoni del rigore della teoria dei limiti, quindi nel canone del rigore classico [13].

[13] Su questi argomenti cfr. Colin Mac Laurin, *Treatise of Fluxions*, 2 voll.,

È chiaro che la teoria dei limiti di MacLaurin ottiene due risultati molto rilevanti. In primo luogo traduce il metodo delle prime e ultime ragioni di Newton in una prospettiva completamente compatibile con la proprietà di esaustione, in secondo luogo riconduce il nuovo calcolo alle sicurezze implicite nella geometria sintetica.

Questo fatto, in linea di principio, permetterebbe di disinnescare i paradossi dell'indistinguibilità, originariamente formulati da Nieuwentijt e poi ripresi da Berkeley.

L'impostazione di MacLaurin ebbe una grossa diffusione sul continente europeo e fu considerata da d'Alembert il punto fermo del rigore matematico.

Infatti, sulla falsariga di quanto aveva già affermato MacLaurin, d'Alembert osserva che Newton non ha mai differenziato delle quantità ma solo delle equazioni; dato che ogni equazione contiene un rapporto fra due variabili, la differenziazione consisterebbe nel trovare il limite del rapporto tra le differenze finite delle due variabili [14].

Se si ammette questa impostazione, sempre secondo d'Alembert, si evitano tutti quei paradossi imputabili al fatto di ragionare su quantità fisse. Ad esempio si eviterebbe il fatto di essere costretti ad ammettere, come fa Euler, che una stessa cosa può essere *zero* e contemporaneamente può avere un valore distinto dallo *zero*.

I riferimenti nei confronti di Newton servono a d'Alembert per mettere a fuoco la nozione di limite; quest'ultimo, nell'articolo « Limite » scritto per l'*Encyclopédie*, viene definito come quella quantità cui una seconda quantità (variabile) può avvicinarsi cosí tanto che la differenza risulta inferiore a qualsiasi quantità data [15].

Come si può vedere l'impostazione di d'Alembert, pur avendo quale punto di riferimento costante lo stesso Newton, in realtà si muove sulla linea del programma già realizzato da MacLaurin.

Per quel che riguarda il fatto, poi, che l'infinitamente piccolo abbia giocato un ruolo intuitivo determinante nella scoperta del nuovo calcolo,

Edinburgh 1742. Occorre tener presente soprattutto l'Introduzione ed il Cap. I, pp. 1-70.

[14] Cfr. la voce « Différentiel », in *Encyclopédie ou Dictionaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres. Mis en ordre et publié par M. Diderot ... et quant à la Partie Mathématique par M. d'Alembert*, Paris 1751-65, vol. IV, pp. 985-989.

[15] Cfr. la voce « Limite », ivi vol. IX, p. 542.

quindi in qualche modo debba essere giustificato, secondo d'Alembert si deve ricercare la soluzione nella peculiare logica del riferimento cui sottostanno in genere le nozioni.

Se è vero che vi sono campi di nozioni che si riferiscono a determinati contenuti individuali, è altrettanto vero che vi sono nozioni che non possono essere interpretate restrittivamente in questo senso. E la maggior parte delle nozioni matematiche appartengono a questa seconda categoria.

Se noi esaminiamo le caratteristiche presenti in un concetto geometrico, quale può essere il punto della geometria euclidea, non avremo alcuna difficoltà ad ammettere che risulta privo di ogni riferimento diretto a qualsiasi contenuto individuale dell'esperienza. Ci troviamo dinnanzi — continua d'Alembert — ad un limite intellettuale che organizza in maniera ideale una serie aperta di fatti e di situazioni [16].

Potremmo affermare che d'Alembert conferisce un valore puramente disposizionale a questo tipo di concetti; il loro valore sarebbe esclusivamente nomologico in relazione ad una serie aperta di fatti o di operazioni.

La nozione di infinitesimo rientrerebbe interamente in questa prospettiva. Non rinvierebbe affatto ad alcuna effettiva grandezza infinitamente piccola ma si tratterebbe di un semplice modo di parlare che ha la funzione di condensare in un unico centro focale una caratteristica (dinamica) già presente nella proprietà di esaustione: quella di poter sorpassare in piccolezza una qualsiasi grandezza comunque piccola; tratterebbesi in sostanza del moto continuo di avvicinamento.

In questa prospettiva la nozione di infinitesimo non farebbe altro che semplificare i ragionamenti, senza che ciò ci autorizzi ad attribuire alla parola stessa alcun referente al di fuori della sua semplice funzione nomologica [17].

In tal modo d'Alembert salda la sua teoria matematica dei limiti alla sua teoria filosofica dei concetti limite. Quindi, tramite il rovesciamento dei criteri di applicabilità della *Proprietà di esaustione* e la teoria del riferimento, fornisce una base fondazionale alla *höhere Mathematik*

[16] Circa questo tipo di problemi cfr. *Éléments de philosophie*, in *Mélanges de littérature d'histoire et de philosophie*, 5 voll., Amsterdam 1763-70, vol. IV, pp. 154 ss. e 190 ss.; *Éclaircissement sur différents endroits des Éléments de philosophie*, ivi, vol. V, pp. 253 ss. e 270 ss.; *Discours préliminaire*, ivi, vol. I, p. 42 ss.

[17] Cfr. la voce « Différentiel », in *Encyclopédie*, cit., vol. IV, p. 986.

che dovrebbe salvare l'omogeneità complessiva del rigore matematico [18].

Tuttavia, malgrado l'adesione di d'Alembert, la teoria dei limiti non ebbe come risultato quello di scalzare l'impostazione leibniziana legata all'*analysis situs*.

La situazione sul continente europeo era profondamente diversa da quella anglosassone del 1742. Varcata la soglia della metà del secolo, dopo il dibattito sulle corde vibranti, ci si accorse dell'esistenza di un campo relazionale concreto completamente al di fuori della presa del rigore formale.

Questo fatto, presso d'Alembert, non rappresentava un inconveniente in quanto nel dibattito, contro Euler e contro Daniel Bernoulli, aveva sostenuto non essere di pertinenza matematica. Ma, presso la maggior parte dei matematici dell'epoca, primo fra tutti lo stesso Euler, l'esigenza dell'approccio al campo concreto della matematica aveva determinato l'uso dell'*analysis situs* come una sorta di logica relazionale in grado di riflettere integralmente il concreto stesso. E da questo punto di vista la fondazione del rigore, di per se stessa, non era in grado di coprire la piú vasta prospettiva legata appunto all'*analysis situs*.

Da questo momento in poi si determina una duplice prospettiva: relativamente ai problemi fondazionali, legati al rigore del calcolo, si ricorre alla teoria dei limiti, cosí come era stata filtrata da Colin MacLaurin; relativamente al concreto si ricorre ai concetti tradizionali leibniziani, quale ad esempio quello di sezione, con i relativi principi di cor-

[18] La definitività della soluzione Mac Laurin - d'Alembert avrebbe dovuto porre fine ad una serie di attacchi che la matematica aveva subìto lungo tutto l'arco della prima metà del secolo. Favoriti questi da posizioni, epistemologicamente ingenue, sostenute molto spesso dagli stessi matematici.

Ad esempio L' Hospital nel suo *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris 1696, considera l'assunto, secondo cui una curva può essere considerata composta da segmenti infinitamente piccoli che determinano, mediante la loro inclinazione reciproca, il grado di curvatura della curva stessa, come una evidenza tale da non sollevare il minimo dubbio. Su questa base proliferarono lavori critici quali quelli di L. Grandi, *De infinitis et infinite parvorum ordinibus disquisitio*, Pisa 1710; di J. C. Sturm, *De matheseos incomprehensibilibus*, Francofurti et Lipsiis 1722; di J. S. Cartaud, *Pensées critiques sur le mathématiques*, Paris 1733, in cui si sostiene che la cosiddetta tradizionale certezza della matematica risulta in effetti una costruzione tanto precaria quanto artificiosa. Una tesi analoga viene sostenuta, addirittura dopo la pubblicazione dell'*Introductio*, da A. P. Le Guay de Prémontaval, *De la notion de l'infini*, in « Mém. de l'Acad. de Sciences de Berlin », 1758, p. 445.

rispondenza atti a rendere compatibili le nuove nozioni relazionali con le classiche nozioni estensionali.

Le due prospettive finiscono dunque per coesistere anche presso uno stesso autore, con la consapevolezza che l'approccio funzionale, legato al rigore del calcolo, risulta in qualche modo piú povero di contenuto nei confronti dell'approccio relazionale legato al concreto.

Capitolo IV

GLI ENIGMI DELLA METAFISICA RELAZIONALE

4.1. *Il Paradosso di Lambert.*

Euler era stato collega, presso l'Accademia di Berlino, di Johann Heinrich Lambert ed i due si trovarono impegnati in uno sforzo comune nel mettere a punto una efficace epistemologia della nuova metafisica relazionale emersa dopo il dibattito sulle corde vibranti.

L'enigma di fondo della nuova prospettiva era rappresentato dal *paradosso della soppressione*, già individuato da Nieuwentijt, ed in qualche modo reso virtuoso dalla riflessione epistemologica di Euler. Si trattava di rendere ragione della evidente controfattualità implicita in concetti, quale quello di sezione, ereditati dalla metafisica leibniziana (in questo caso dall'*analysis situs*) senza comprometterne la funzione che esercitavano nel processo conoscitivo.

In questo senso Lambert separa nettamente due fasi in cui i concetti semplici fungono rispettivamente da *terminus ad quem* e da *terminus a quo*.

Nel primo caso si tratta di una sorta di processo che tende a conferire una organizzazione al campo complessivo dell'esperienza o dell'intuizione. Da questo punto di vista i concetti semplici risulterebbero dei semplici centri focali atti a rappresentare le basi immediate della potenziale intelaiatura relazionale in cui è destinato ad essere immerso l'oggetto. Ad esempio le proprietà rappresenterebbero centri focali di tal fatta, in quanto pur non essendo parti dell'oggetto (la durezza è una proprietà della roccia ma non rappresenta una sua parte) costituirebbero gli elementi semplici su cui portano le possibili combinazioni relazionali.

Occorre tener presente che Lambert sviluppa queste osservazioni avendo come punto di riferimento il concetto leibniziano di sezione: una sezione che delimita una successione di posizioni, che tendono ad avvicinarsi illimitatamente ad un termine fisso, non rappresenta affatto un elemento della successione stessa (una sua parte) bensí una sua proprietà relazionale.

Malgrado questo, la nozione risulterebbe ricavabile dall'esperienza specifica che noi abbiamo di un certo tipo di successione (ad esempio quella che tende ad avvicinarsi illimitatamente ad un termine fisso piuttosto che quella che procede all'infinito senza ulteriori limitazioni) anche se è completamente estranea alle fasi algebriche della sua composizione.

Nel secondo caso i concetti semplici (o le proprietà) fungerebbero da punto di partenza della deduzione scientifica, quindi avrebbero la funzione di assiomi in un discorso organizzato [1].

In questo secondo caso non si fa altro che prescindere dalla fenomenologia della formazione di questi concetti per affidarne il significato ai paradigmi sintattici in cui sono inseriti. E questa sarebbe la funzione dell'*analysis situs* nei confronti della nozione di sezione [2].

Lambert, allo stesso modo di Euler, non ha fatto altro che giustificare il paradosso della soppressione in ragione della sua funzione nel processo conoscitivo. Da un lato viene assicurata la stringenza empirica di un qualche cosa ricavabile dall'esperienza ma, ad un tempo, estranea all'oggetto; dall'altro lato viene assicurata la possibilità di riflettere integralmente il campo concreto delle relazioni, proprio prescindendo dall'esperienza stessa ed in virtú di una semplice procedura sintetica di composizione a partire dagli assiomi. È evidente che l'*analysis situs* leibniziana rientra a pieno diritto in questo schema, nella misura in cui riesce a riflettere il campo concreto delle relazioni matematiche.

Secondo Lambert, si realizzerebbe una generalizzazione di tipo rela-

[1] Lambert codifica definitivamente queste tesi in *Anlage zur Architektonik oder Theorie des Einfachen und des Ersten in philosophischen und mathematischen Erkenntnis*, 2 voll., Riga 1771, soprattutto ai paragrafi 11, 51, 94, 193, 197 e 374. Cfr. anche i *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik*, Berlin 1765, segnatamente ai paragrafi 3 e 9. Circa la posizione complessiva di Lambert nella storia del pensiero filosofico e le differenze con Kant, cfr. Otto Baenesch, *Johann Heirich Lamberts Philosophie und seine Stellung zu Kant*, Tübingen - Leipzig 1902.

[2] Su questi argomenti cfr. *Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrthum und Schein*, 2 voll., Leipzig 1764, soprattutto ai paragrafi 639 e 660. Cfr. inoltre *Architektonik*, cit., paragrafi 297-304.

zionale completamente differente da quella classica, basata su di una logica tipo genere e specie. Infatti, nella prospettiva classica, eliminando i caratteri individuali delle cose, si procede verso classi sempre piú astratte, quindi sempre piú povere di contenuto; in questo caso, al contrario, partendo da elementi semplici, si procede verso classi sempre piú complesse di relazioni, in modo tale da poter riottenere quello da cui si era partiti mediante una procedura di analisi [3].

Il risultato è che proprio in virtú di un metodo di soppressione del concreto, e non di un semplice metodo astrattivo, si riesce a rendere ragione della complessità. E si riesce a padroneggiare l'intiera procedura mediante un doppio processo, per cosí dire, di andata e ritorno; la procedura *di sintesi* permette di effettuare una composizione in direzione del complesso e la procedura *di analisi* permette di riottenere ciò da cui si era partiti.

Il problema è costituito dal fatto che la logica tradizionale, basata sostanzialmente su di un calcolo estensionale, non è in grado di rendere ragione della nuova prospettiva, quindi non è in grado di giustificare la nuova teoria della conoscenza, la quale ultima in luogo di fondarsi su di una dinamica tipo genere e specie si fonda piuttosto, come abbiamo già visto, sul meccanismo della soppressione.

Leibniz si era trovato dinnanzi ad un problema analogo e lo aveva risolto enunciando dei principi di corrispondenza tra la classica prospettiva estensionale e la nuova prospettiva relazionale segnata dall'*analysis situs*.

Lambert procede in maniera, per certi versi, analoga all'impostazione leibniziana degli *Initia rerum mathematicarum metaphysica* e articola un programma ripartibile in due fasi. In un primo momento si tratta di far vedere che la vecchia logica estensionale può essere interamente espressa in una simbologia geometrica che, nell'ambito dell'*analysis situs*, riflette *un certo grado di semplicità* della relazione, come tale corrispondente all'estensione. In un secondo momento si tratta di articolare la nuova logica relazionale, sempre sull'esempio del calcolo delle posizioni tipico dell'*analysis situs*, in quell'ambito che risulta totalmente indipendente, quindi divergente, dalla classica prospettiva estensionale. Con il che verrebbe sancita una corrispondenza, ad un certo limite, che, ad un tempo, salva l'autonomia della nuova prospettiva.

[3] Cfr. *Architektonik*, cit., par. 193 ss.

Lambert, per la prima volta, affronta la fase iniziale del suo programma in una lettera indirizzata a Kaestner, successivamente pubblicata sulle « Göttingische Anzeigen von gelehrten Sachen » del 5 marzo 1764.

Il soggetto ed il predicato risulterebbero rappresentabili per mezzo di segmenti la cui lunghezza dovrebbe tradurre la relativa estensione dei concetti. Nel caso del giudizio affermativo, i segmenti dovrebbero essere tracciati parallelamente fra loro, nel caso del giudizio negativo dovrebbero essere disposti l'uno a fianco dell'altro.

In questo modo risulterebbe possibile la rappresentazione grafica del sillogismo, ricavando l'eventuale conclusione mediante un semplice calcolo grafico portante sui rapporti delle estensioni [4].

Nel caso della logica relazionale la situazione non risulta piú interpretabile in termini di estensioni, quindi non piú aritmetizzabile, e la sua simbolizzazione corrisponderebbe ai livelli piú sofisticati dell'*analysis situs* (mentre la simbolizzazione geometrica tramite segmenti corrisponderebbe ai piani meno sofisticati) in cui rientrano rapporti non piú interpretabili estensionalmente.

La nuova logca qualitativa si basa, quindi, sulla composizione degli elementi semplici o delle proprietà che, come abbiamo già visto, non rientrano nei meccanismi di spiegazione tipo genere e specie.

Lambert schematizza questa nuova prospettiva in una lettera allo Holland del 24 aprile 1768, titolata *De universaliori calculi idea disquisitio, una cum adnexo specimine* poi pubblicata nei « Nova Acta Eruditorum » di Lipsia [5].

Il nuovo calcolo, secondo Lambert, non dovrebbe piú vertere su *individui*, bensí su *proprietà* e dovrebbe trattare esclusivamente le *inerenze* cioè i casi che prevedono nozioni relazionate ad altre nozioni. Esso si fonda sul fatto che soggetto e predicato possono diventare identici (pur non essendolo come individui) se moltiplicati con proprietà.

Ad esempio si può formulare l'identità $A = nB$ in cui il simbolo « n » indica il complesso delle proprietà di A che mancano a B, oppure

[4] Cfr. *Lamberts deutschen Gelehrten Briefwechsel*, edito da Johann Bernoulli, discendente della famiglia dei Bernoulli ed omonimo del piú famoso Johann Bernoulli contemporaneo di Leibniz, Berlin 1781, vol. I, p, 384 ss.

[5] Cfr. *Lamberts deutschen Gelehrten Briefwechsel*, cit., vol. I, p. 56 ss.

si può scrivere, nel caso delle proposizioni universali negative, $\frac{A}{p} = \frac{B}{q}$ in cui il simbolo di divisione indica la detrazione delle proprietà che non sono comuni rispettivamente ad A e B.

In tal modo la formula generale di ogni giudizio diventa: $\frac{mA}{p} = \frac{nB}{q}$ sulla cui base possono essere composti rapporti relazionali sempre piú complessi secondo i criteri che avevamo visto tipici della stessa generalizzazione relazionale.

Con ciò viene formulata una corrispondenza analoga a quella di Leibniz; infatti un rapporto relazionale, tipo $\frac{m}{n}$, oltre un certo limite può essere inteso solo qualitativamente ma al di qua dello stesso limite può essere interpretato come rapporto di segmenti, quindi di estensioni.

Con il che Lambert, sull'esempio di quanto aveva già fatto Leibniz, e poi Euler nel 1755, rende *virtuoso* il *paradosso della soppressione* enunciato da Nieuwentijt, legittimando, con un *principio,* una vera e propria doppia asserzione, quest'ultima riconducibile al fatto che l'identità A = A è anche A = non A purché esista almeno un certo limite in cui le due asserzioni coincidano.

Tuttavia la legittimazione del paradosso finisce per identificarne un altro altrettanto traumatico.

Lambert aveva caratterizzato il metodo scientifico mediante un duplice processo di andata e ritorno. Nel primo caso si partiva dagli elementi semplici, o proprietà, e li si componeva identificando sinteticamente una struttura relazionale complessa; nel secondo caso scomponendo quello che si era trovato era possibile riottenere gli elementi semplici da cui si era partiti.

In questo senso la procedura di analisi doveva fungere da semplice controllo dei risultati complessi, ottenuti mediante la prima procedura. Tuttavia detto controllo finisce per evidenziare nuovamente situazioni paradossali.

Dobbiamo tener presente che gli elementi semplici rappresentano proprietà o qualità degli oggetti-individui, quindi sono destinati, in certo qual modo, a riempire le strutture combinatorie delle relazioni. In questo senso un elemento semplice differisce dalla relazione proprio in quanto quest'ultima presuppone un rapporto di proprietà [6].

[6] Cfr. *Disquisitio,* cit., par. 11 ss.

In tal modo lo stesso meccanismo della generalizzazione relazionale o della composizione si regge su relazioni di elementi semplici destinate ad articolarsi in modo sempre più complesso [7].

Se teniamo presente la formula generale di ogni giudizio $\frac{mA}{p} = \frac{nB}{q}$, possiamo osservare che, per ogni individuo A, si stabilisce una relazione tipo $\frac{m}{p}$ in cui m e p rappresentano insiemi di elementi semplici; il controllo circa la correttezza del giudizio stesso dovrebbe essere assicurata da una procedura di analisi in grado di riottenere gli elementi semplici di partenza.

Ma in questo caso si verifica una sorta di anomalia: la procedura di analisi non si limita ad ottenere gli elementi semplici di partenza, quindi non si limita a confermare la correttezza dell'enunciato complesso, ma altresí ottiene un qualche cosa di nuovo.

Infatti la procedura evidenzia una serie di rapporti $\frac{a}{b}$, in cui rispettivamente a e b sono rappresentati da un singolo elemento semplice e non più da insiemi come avveniva nel giudizio; in sostanza quello che si ottiene è rappresentato da una successione di relazioni semplici che, relativamente ad un dato individuo A, dovrebbero rappresentare una intelaiatura di possibili posizioni che lo stesso individuo può assumere in un determinato contesto.

Che questi nuovi risultati non siano presenti nella fase iniziale della procedura è relativo al fatto che la composizione, come afferma esplicitamente Lambert, è costretta a partire da un fondamento primo che si regge su di una articolazione minimale rappresentata dalla copula « è », quindi su rapporti fra insiemi di proprietà. È l'analisi che riesce a ricavare le *relazioni semplici* che rappresentano l'intelaiatura di fondo su cui eventualmente possono articolarsi le modalità di successive possibili composizioni [8].

La situazione riflette, in una certa misura, il problema tipico delle procedure del raddoppiamento della secante; anche in questo caso, infatti, la procedura di analisi finiva per identificare delle relazioni semplici, quali i rapporti differenziali $\frac{dy}{dx}$, che, in certo qual modo,

[7] Cfr. ivi, par. 6 ss.

[8] Cfr. ivi, par. 23.

uscivano fuori dal contesto iniziale riuscendo ad ottenere una vera e propria generalizzazione. Allo stesso modo le relazioni semplici di Lambert generalizzano il contesto specifico in cui sono formulati i giudizi.

Da questo punto di vista si determina un vero e proprio paradosso che sancisce l'indistinguibilità logica dei due tipi di procedure: quella di analisi e quella di sintesi. Entrambe metterebbero capo a generalizzazioni sintetiche.

I confini fra le due procedure, da questo momento in poi, risultarono radicalmente sfumati e, almeno lungo tutto l'arco della metà del secolo, cessò la tradizionale contrapposizione che aveva caratterizzato i due metodi.

4.2. *Kaestner e l'ambiente di Gottinga.*

L'ambiente scientifico della *Georg-August-Universität* era caratterizzato per il suo spirito positivo orientato alla scienza militante. Da questo punto di vista si afferma la convinzione che deve essere la scienza stessa a stabilire i propri quadri concettuali senza aspettare che sia la filosofia ad imporli dall'esterno.

Ne risulta un atteggiamento sostanzialmente anti-speculativo, orientato alla costruzione dei quadri epistemologici a partire da problemi scientifici concreti, sia nel caso detti problemi risultino circoscrivibili all'interno di una singola disciplina, sia nel caso interessino una dimensione interdisciplinare piú ampia.

In questo ambito si caratterizza l'attività della *Königlische Societät der Wissenschaften*, costituita sul modello della *Royal Society*, le cui *Commentationes* ed i cui *Preisfragen* costituirono un vero e proprio punto di riferimento della cultura scientifica dell'epoca. Allo stesso modo le « Göttingische Anzeigen », su cui scrissero quasi tutti i docenti della *Georg-August*, rappresentarono lo specchio dei piú scottanti dibattiti scientifici dell'epoca.

È stato rilevato che proprio questo spirito positivo finì per rappresentare una sorta di arma a doppio taglio nell'ambito di Göttingen: se da un lato finí per favorire una riflessione strettamente ancorata ai problemi scientifici, dall'altro produsse una sorta di sclerotizzazione su temi specifici che impedí la possibilità di cogliere il segno dei nuovi tempi, manifestatosi con le grandi costruzioni filosofiche dei primi dell'ottocento. E questo segnò fatalmente il declino della *Georg-August* [9].

Non è nostra intenzione comunque addentrarci in questi bilanci complessivi, che fra l'altro coinvolgono temi completamente estranei al nostro argomento, ci preme invece mettere in luce solo quegli aspetti destinati ad influire sull'epistemologia dei concetti matematici.

Uno di questi aspetti, destinato ad affermarsi in un certo ambiente della *Georg-August* fu una concezione dei concetti scientifici filtrati attraverso l'interpretazione, per cosí dire, operazionista del *Trattato* di Hume.

Maupertuis, in una serie di scritti pubblicati dall'Accademia di Berlino tra il 1746 ed il 1756, fu il primo ad usare le idee humiane in questo senso originale [10].

È noto che l'impostazione generale di Hume distingue radicalmente due campi della prassi scientifica, da un lato vi sono le scienze che trattano di relazioni fra idee (la matematica rientra in questo ambito), dall'altro vi sono le scienze che trattano di materie di fatto. Mentre le prime sono certe dimostrativamente (obbediscono al principio di non-contraddizione), le seconde sarebbero soltanto probabili. Infatti per ogni materia di fatto è sempre possibile immaginare il contrario senza che ciò implichi contraddizione. Questa partizione si regge sul fatto che, essendo la matematica una scienza analitica, l'unico paradigma su cui si reggono le relative inferenze risulta essere il principio di non contraddizione, al contrario le scienze fattuali, dato che non si reggono su alcuna evidenza dimostrativa, hanno come unica certezza quella dei sensi.

Tuttavia, per Hume, la situazione non è così pacifica come potrebbe apparire a prima vista: anche nella matematica possono sorgere paradossi e ciò minaccia di aprire l'inferenza matematica all'incerta prospettiva della probabilità, tipica delle scienze fattuali. Per ovviare a questa difficoltà che minaccerebbe di infrangere il presupposto fondamentale su cui si regge la distinzione tra scienze matematiche e scienze empiriche (quello rispettivamente della necessità e della pro-

[9] Circa la storia della *Georg. August Universität* cfr. F. Saalfeld, *Geschichte der Universität Göttingen in dem Zeitraume von 1788 bis 1820*, Hannover 1820; e la piú ampia Götz von Selle, *Die Georg-August - Universität zu Göttingen 1737-1937*, Göttingen 1937; ci piace altresí ricordare L. Marino, *I maestri della Germania*, Torino 1975.

[10] Cfr. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, Berlin 1746-1756.

babilità) Hume introduce un'ulteriore distinzione: un conto è parlare di quello che avviene nella matematica, altro conto è l'effettiva attività del matematico che costruisce inferenze. I paradossi sarebbero interamente ascrivibili alla prima prospettiva, cioè agli effetti impliciti in simboli come « $>$ », « $<$ », « $=$ », « i », etc.; in questo caso, infatti, ci si imbatte in significati generali come maggiore, minore, uguale, infinitesimo, etc. Ebbene se si finisce per pensare che detti termini generali abbiano un significato autonomo e indipendente, il ragionamento fatalmente si involve in paradossi.

Per evitare questi equivoci — a detta di Hume — occorre riconoscere che i significati generali debbono essere ristretti esclusivamente ai significati particolari che sempre gli sono connessi. I sensi fungono quindi da rasoio di Occam circa l'uso di questi termini; sono i sensi infatti che decidono della relativa esistenza o non esistenza [11].

L'originalità di Maupertuis consiste nel dare una connotazione operazionale allo schema di Hume e questo finisce per conferire un carattere elastico alla restrizione del filosofo scozzese.

I simboli, da questo punto di vista, esprimerebbero delle connessioni le quali si reggerebbero su funzioni grammaticali che hanno senso esclusivamente all'interno del linguaggio in cui risultano operative.

L'aspetto fuorviante consisterebbe nel proiettare fuori di noi i simboli e la loro grammatica considerandoli nel primo caso oggetti sussistenti di per sé, nel secondo caso intendendo semplici connessioni come caratteristiche concrete [12].

E questo, secondo Maupertuis, sarebbe l'errore di fondo in cui si è incorsi giudicando il simbolismo differenziale. Non si è capito in sostanza che i differenziali non sarebbero altro che simboli, dotati di una loro grammatica specifica, il cui significato non è altro che quello

[11] Il filo di quanto abbiamo detto è già riscontrabile nel *Trattato*. Cfr. *A Treatise of human Nature: being an Attempt to introduce the experimental Method of Reasoning into Moral Subjects*, 2 voll., London 1739; soprattutto Libro I, parte I, sezz. I e VII; parte II, sez. I; parte III, sezz. I e VI; parte IV, sez. I. La stessa impostazione Hume la espone in maniera piú concisa e semplificata nei *Philosophical Essay concerning human Understanding*, London 1748; l'opera comparve con il titolo definitivo di *Enquiry concerning human Understanding* nel 1758.

[12] Cfr. *Réflexions philosophiques sur l'origine des langues et la signification des mots*, in *Oeuvres*, Lyon 1756, vol. I, p. 227 ss.

di riflettere delle operazioni di delimitazione: servono a distinguere e qualificare un processo di illimitato avvicinamento [13].

Lo schema di Hume viene, per cosí dire, adattato al sorgere della nuova logica relazionale. Cioè a quella prospettiva che, pur attribuendo alla relazione il carattere della empiricità, la distingue dagli oggetti-individui, cioè dal concreto determinabile estensivamente.

L'adattamento non è di poco conto, infatti, da quest'ultimo punto di vista, diventerebbe problematica la stessa separazione epistemologica, enunciata da Hume, tra matematica e scienze empiriche: concetti quali quelli di differenziale, di spazio assoluto, di forza, di posizione, ecc., rientrerebbero tutti nella medesima prospettiva relazionale e richiederebbero una epistemologia unitaria, quella appunto relativa ai simboli, in grado di prescindere dalla loro appartenenza a discipline specifiche.

Come abbiamo già avuto modo di vedere, Euler, nell'arco di tempo che va dal 1748 al 1755, aveva consolidato una posizione di questo tipo relativamente alla meccanica ed alla matematica, lo stesso aveva fatto Boscovich, ma ora la prospettiva si dilata ulteriormente.

Nell'ambiente di Göttingen due sono gli episodi significativi, dovuti sia al diffondersi della concezione operazionista dei concetti sia al diffondersi della prospettiva relazionale segnata dal recupero dell'*analysis situs*.

Il primo è rappresentato dalla polemica relativa alla *fisiognomica*, il secondo dalla critica alle procedure, per *genere* e *differenza*, di Linneo.

L'occasione fu innescata dall'uscita a Zurigo dei quattro volumi di Lavater, *Physiognomische Fragmente zur Beförderung der Menschenkenntnis und Menschenliebe*, nei quali lo scienziato zurighese enunciava il piano complessivo della nuova scienza dell'uomo fondato sullo studio dei caratteri fisici [14].

Dal punto di vista epistemologico la nuova scienza si basava sull'assunto della perfetta corrispondenza tra la forma fisica e l'aspetto interiore del carattere. Se l'uomo era una totalità di caratteri interiori allora questa totalità poteva essere ricostruita partendo proprio dai ca-

[13] Cfr. *Essai de Cosmologie*, in *Oeuvres*, cit., vol. I, p. 38.

[14] J. K. Lavater, *Physiognomische Fragmente zur Beförderung der Menschenkenntnis und Menschenliebe*, 4 voll., Zürich 1775-1778.

ratteri esteriori. Infatti questi ultimi, nel loro aspetto fisico particolare, avevano la proprietà di rifletterla integralmente.

Su questa base Lavater riteneva che lo studio fisico dell'anatomia del corpo umano avrebbe permesso la ricostruzione della totalità delle sue manifestazioni, delle sue disposizioni e facoltà.

In sostanza la fisiognomica pareva essere destinata a diventare una sorta di super-scienza in grado di spiegare tutte le manifestazioni dell'uomo, quindi in grado di fondare unitariamente le scienze umane [15]

Lichtenberg, una delle figure piú rappresentative della *Georg-August*, si oppone decisamente a Lavater [16].

Il professore di Gottinga, nel suo scritto *Ueber Physiognomik; wider die Physiognomen. Zu Beförderung der Menschenliebe und Menschenkenntnis* pubblicato nel 1778, non si oppone all'assunto epistemologico di fondo della nuova disciplina ma si oppone decisamente alla pretesa di estenderne la portata oltre i suoi limiti evidenti.

Che ogni singola parte possa essere considerata uno specchio del tutto risulta del tutto legittimo e scientificamente produttivo, tuttavia un semplice studio anatomico, quindi per sua stessa natura basato su di un approccio estensionale, difficilmente può essere considerato esauriente nei confronti della complessità relazionale che caratterizza l'aspetto interiore. Con il che viene colpita la pretesa onnicomprensiva della nuova disciplina [17].

Blumenbach, nelle sue osservazioni su Linneo, condotte nello stesso arco di tempo della polemica sulla fisiognomica, sostiene una tesi analoga. Nel suo *De generis humani varietate nativa* mette in evidenza la difficoltà di procedere ad una analisi comparata dei caratteri umani con quelli animali basandosi su di una metodologia logica tipo genere e differenza, quindi su di una metodologia di tipo estensionale.

[15] Cfr. *Physiognomische Fragmente*, cit., vol. I, pp. 15 ss., 40 ss. e 70 ss.

[16] Lichtenberg era professore di matematica e fisica a Gottinga, amico di Kaestner e Blumenbach, fu uno studioso delle forze elettriche. A questo proposito cfr. il suo *De nova methodo motum ac natura fluidi electrici investigandi*, Göttingen 1777. Fu anche amico di Volta con cui ebbe un incontro nel 1784. A questo proposito rimandiamo al lavoro di C. Cases, *Ritratto di Lichtenberg attraverso il suo incontro con Volta*, in *Momenti di cultura tedesca*, Cremona 1973.

[17] Originariamente il lavoro di Lichtenberg comparve nel 1777 nel « Gottingischer Taschenkalender » col titolo *Über Physiognomik und am Ende etwas zur Erklärung der Kupferstiche des Almanachs*, successivamente fu ripubblicato a parte con il titolo che abbiamo riportato nel testo. Circa quello che abbiamo detto cfr. soprattutto pp. 259-264.

La difficoltà consisteva, infatti, nell'impossibilità di concettualizzare efficacemente le differenze stesse in assenza di un approccio relazionale al problema.

Il metodo di Linneo incontrerebbe delle difficoltà proprio per il fatto di non riuscire ad isolare un principio generatore cui possano essere relazionate le differenze specifiche.

Chi non si accorge, afferma Blumenbach, delle differenze che intercorrono tra l'uomo e la scimmia? Il problema sorge nella misura in cui dette differenze debbono essere spiegate, quindi debbono essere ricondotte ad un unico centro focale in grado di padroneggiarle unitariamente.

Il *nisus formativus*, sempre secondo Blumenbach, rappresenterebbe appunto la forza vitale generatrice in grado di spiegare dinamicamente l'intiero edificio dell'antropologia.

Da questo punto di vista il valore concettuale del *nisus formativus* non risulterebbe affatto dissimile dal concetto di forza, così come viene usato da Newton nella meccanica, o dal concetto di infinitamente piccolo così come viene usato nelle matematiche [18].

Il risultato sia nel caso di Lichtenberg sia nel caso di Blumenbach è quello di estendere all'interno dell'empiria la stessa divaricazione epistemologica tra il punto di vista estensionale ed il punto di vista relazionale che aveva caratterizzato la matematica nella misura in cui aveva assunto il punto di vista dell'*analysis situs*.

In questo senso la partizione classica tra matematica e scienze empiriche diviene del tutto problematica; piuttosto viene sostituita con una piú adeguata partizione atta a separare le scienze estensionali da quelle relazionali.

La figura di Kaestner si colloca in questo contesto epistemologico.

La linea di demarcazione tra l'approccio estensionale e quello relazionale era un portato della matematica della seconda metà del settecento e Kaestner ritiene che, in certo qual modo, costituisca il problema tipico della scienza dell'epoca e non solo della matematica.

Quello che preme al matematico di Göttingen è di mostrare come detta linea di demarcazione non separi affatto una metodologia (quella estensionale) che si muove nel regno indubitabile della certezza da un'altra metodologia (quella relazionale) che si fonda su enigmi.

[18] Su questi argomenti cfr. J. F. Blumenbach, *De generis humani varietate nativa*, Göttingen 1776, soprattutto pp. 2 ss., 43 ss., 130 ss. e 160 ss.

Infatti, da un punto di vista epistemologico, entrambi i metodi risulterebbero interessati dal paradosso della soppressione originariamente formulato da Nieuwentijt contro Leibniz.

Il punto di riferimento di Kaestner è rappresentato dal classico metodo estensionale, per genere e differenza, sostenuto da Linneo [19].

Presumibilmente i rapporti diretti con Lambert influirono molto nella messa a punto della seconda *Vorlesung*, infatti la tesi di Kaestner, sostenuta nel 1768, è pressoché analoga a quella sostenuta da Lambert nella sua *Disquisitio* apparsa nello stesso anno [20].

Kaestner osserva che la procedura per astrazione, consistente nell'eliminazione progressiva dei caratteri specifici di un individuo, finisce per ottenere dei semplici contrassegni astratti che perdono completamente i contatti con il c o n c r e t o d i p a r t e n z a. Infatti, quando si vuole recuperare la specificità, si è costretti ad una enumerazione non terminabile. Da questo punto di vista la metodologia estensionale presenterebbe una procedura di soppressione del concreto, in certo qual modo, non radicalmente dissimile da quella presente nell'approccio relazionale.

In sostanza il paradosso della soppressione costituirebbe un enigma del processo conoscitivo nella sua intierezza, non una caratteristica imputabile esclusivamente al nuovo approccio relazionale [21].

Il fatto che i due punti di vista coesistano all'interno della matematica implica soltanto il fatto che il metodo algebrico-geometrico non può essere considerato l'unico modello del rigore matematico.

La stessa matematica dell'infinito può esibire un modello formale, basato sull'approccio funzionale (trattasi della serie di Taylor) e un modello concreto, basato sull'*analysis situs*.

19 Kaestner precisa il suo pensiero in occasione dell'uscita di una raccolta di suoi saggi. Cfr. A. G. Kaestner, *Einige Vorlesungen*, Altenburg 1768, *Vorlesung* II, pp. 15-24. Come abbiamo già avuto modo di vedere Blumenbach nel 1776 si ispira direttamente a questa *Vorlesung* di Kaestner nel suo *De generis humani varietate nativa*.

20 Lambert prima di diventare membro dell'Accademia di Berlino era stato nominato membro della Società delle Scienze di Gottinga. Quindi sino a tutto il 1764 aveva avuto rapporti diretti con Kaestner. Lambert aveva sempre considerato il matematico di Gottinga un suo referente privilegiato nell'ambito di uno sforzo comune per precisare il nuovo punto di vista relazionale. Ne fa fede la fondamentale lettera a Kaestner del 1764 sulla nuova *simbologia geometrica* che Kaestner stesso si curò di pubblicizzare sulle « Göttingische Anzeigen ».

21 Cfr. *Einige Vorlesungen*, cit., p. 16 ss.

In questo caso l'approccio funzionale presenterebbe lo stesso riduttivismo epistemologico segnato dalla vecchia prospettiva dell'astrazione: non riuscirebbe a tradurre completamente il concreto. Spetterebbe esclusivamente all'*analysis situs* il compito di rappresentare completamente il concreto relazionale fungendo cosí da fondamento dei vari metodi [22].

Come si può vedere, presso Kaestner, confluiscono pressoché tutti i temi epistemologici evidenziati dalla matematica della seconda metà del secolo.

Infatti la nuova matematica si articolerebbe su tre livelli. Il livello formale, segnato dalla serie di Taylor, che consiste sostanzialmente nell'insieme di definizioni assiomatiche enunciato da Euler nel 1748; il livello dell'interpretabilità geometrica che consiste, secondo l'impostazione già data da MacLaurin, nella riduzione del concetto di derivata alla teoria geometrica dei limiti; ed il livello del concreto relazionale rappresentato completamente dalla nuova logica della posizione (*analysis situs*) [23].

Anche se la coincidenza del punto di vista della relazione col punto di vista del concreto implica la proliferazione di tutti gli enigmi, già enunciati da Euler, Boscovich e Lambert, resta fuori discussione, secondo Kaestner, la sua stringenza empirica.

In una serie di articoli scritti per il « Philosophisches Magazin », a partire dal 1790, il matematico di Göttingen difende la portata empirica dei concetti matematici di spazio ed in genere degli assiomi, malgrado gli enigmi imputabili alla loro controfattualità, e lo fa con ar-

[22] La partizione ci risulta delineata nei due trattati che Kaestner dedica ai due tipi di approccio. Rispettivamente: *Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen*, Göttingen 1760 e *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*, Göttingen 1761. Nel primo caso la grandezza viene trattata dal punto di vista *estensionale* in ragione del *principio di Archimede* e della *proprietà di esaustion*, nel secondo caso viene ripresa l'impostazione, data da Euler nel 1765, separando sostanzialmente il *calcolo formale* (*serie di Taylor*) dalla logica relazionale delle *posizioni* (*analysis situs*).

[23] I differenti livelli emergono chiaramente se raffrontiamo i punti di vista fatti valere da Kaestner in *Anfangsgründe der Analysis des Unendliche*, cit., negli *Anfangsgründe der höheren Mechanik*, Göttingen 1766 e sulle *Dissertationes Mathematicae et Physicae*, Altenburgi 1771. Nei tre scritti si ha una progressiva valorizzazione della *logica della posizione* in quanto fondamento complessivo della matematica. Circa gli *Anfangsgründe der höheren Mechanik* cfr. soprattutto p. 191 ss., circa le *Dissertationes* cfr. p. 37 ss.

gomentazioni molto simili a quelle già usate da Lambert a proposito degli elementi semplici [24].

Da questo punto di vista emerge con chiarezza il problema dell'indistinguibilità epistemologica fra scienze empiriche e scienze matematiche, sostenuto anche da Lichtenberg e Blumenbach, e viene ribadita caso mai la partizione, sostenuta da Lambert, tra scienze estensionali e scienze relazionali, le cui sfere di influenza attraversano orizzontalmente tanto le scienze empiriche quanto le matematiche.

È evidente che, sotto questo segno, si avrebbe una perfetta coesistenza della teoria dei limiti, tipica di Newton e MacLaurin, con l'*analysis situs* di derivazione leibniziana. La coesistenza sarebbe possibile in ragione dei due differenti approcci: quello estensionale e quello relazionale.

È altrettanto evidente che l'*analysis situs* finisce per acquisire le connotazioni di una sorta di super-scienza o super-geometria cui debbono essere ricondotti, sull'esempio della logica relazionale di Lambert, tutti i problemi concreti e, nel caso specifico, l'intiero campo delle funzioni messe in evidenza dal dibattito sulle corde vibranti.

4.3. *Il carattere composito della Matematica dopo il 1770.*

Orientativamente dopo il primo decennio della seconda metà del secolo, i tre livelli epistemologici dell'indagine matematica si caratterizzano quali altrettanti modelli di intervento pratico.

La serie di Taylor risponde alle esigenze della trattazione tecnica di quelle funzioni che risultano padroneggiabili formalmente.

La teoria dei limiti viene usata quale garanzia fondazionale della stessa serie di Taylor in ragione della geometria del moto.

L'*analysis situs*, in quanto dovrebbe rappresentare il campo concreto che sta alla base della stessa matematica, viene usata per affrontare quelle funzioni che sfuggono alla presa formale. Cioè a dire quelle funzioni che necessitano dello stesso concetto di continuità enunciato da Boscovich e che porta direttamente sulla nozione leibniziana di sezione.

A questo proposito l'Accademia di Berlino nel 1784 emette un

[24] Cfr. nei « Philosophisches Magazin », Halle - Berlin 1788-1792, soprattutto gli articoli *Über den mathematischen Begriff des Raumes*, vol. II, pp. 403-419 e *Über die geometrische Axiome*, vol. II, pp. 420-430.

Bando di Concorso il cui scopo era quello di verificare se era possibile pervenire ad una situazione di rigore che in qualche modo riuscisse a padroneggiare unitariamente l'intiera situazione evitando gli enigmi tipici dell'*analysis situs* [25].

Vincitrice del *Bando* risultò la *dissertazione* di L'Huilier: *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris* [26].

L'Huilier in primo luogo prende in esame il rigore delle serie analitiche in quanto rappresentavano l'unico mezzo formale per trattare le funzioni; in secondo luogo tratta del problema della loro compatibilità con l'assioma di Archimede, ed in questo caso sfrutta la possibilità della geometria del moto di uniformarsi alla proprietà di esaustione in ragione delle tecniche già precisate da MacLaurin.

Relativamente alle serie analitiche, come abbiamo già avuto modo di vedere, risultava operativo, presso i matematici dell'epoca, un modo completamente astratto di intendere il simbolismo. Una delle conseguenze tipiche dell'*Introductio* (scritta da Euler trentasei anni prima dell'emissione del *Bando*) era stata quella di aprire una prospettiva in cui fosse possibile definire i concetti semplicemente all'interno del formalismo senza alcun riferimento alle caratteristiche intuitive del moto; in questo senso era diventato *standard*, presso i matematici, definire la derivata quale coefficiente del termine di primo grado dello sviluppo in

[25] Il testo del *Preisaufgabe* del 1784 suona in questo modo: « La classe de Mathématique propose la question pour le Prix qui sera décerné en 1786. L'utilité qu'on retire des Mathématiques, l'estime qu'on a pour elles, et l'honorable dénomination de Sciences exactes par excellence qu'on leur donne à juste titre, sont dues à la clarté de leurs principes à la rigueur de leurs demonstration, et à la précision de leurs théoremes. Pour assurer à cette belle partie de nos connaissances la continuation de ces précieux avantages, on demande. Une théorie claire et precise de ce qu'on appelle Infini en Mathématique. On sait que la haute Géométrie fait un usage continuel des infiniment grands et des infiniment petits. Cependant les Géometres, et même les Analystes anciens, ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini; et de grands Analystes modernes avouent que les termes grandeur infinie sont contradictoires. L'Academié souhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théoremes vrais d'une supposition contradictoire, et qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être substitué à l'Infini, sans rendre trop difficiles ou trop longues, les recherches qu'on expédie par ce moyen. On exige que cette matière soit traitée avec toute la généralité, et avec toute la rigueur, la clarté et la simplicité possibles ». Cfr. in *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*, Berlin 1784, p. 12 s.

[26] J. L' Huilier, *Principiorum calculi differentialis expositio elementaris ad normam dissertationis ab academie scient. reg. Prussica anno 1786. Praemii honore decortae elaborata auctore Simone L' Huilier*, Tübingen 1795.

serie, mentre il differenziale era inteso come un semplice operatore di calcolo implicitamente definito all'interno della serie stessa.

Che questa prospettiva eliminasse le incertezze intuitive, tipiche dell'epoca, non vi era dubbio; tuttavia rimaneva aperto il senso algebrico della serie. L'obiettivo che si pone L'Huilier è appunto quello di algebrizzare completamente la serie ed in questo senso il punto incriminato doveva risultare proprio l'operatore differenziale.

Il problema era di stabilire che presa avesse la proprietà di esaustione sul simbolo differenziale. Infatti il primo capitolo della dissertazione ha per titolo *De limitibus quantitatum et rationum, seu de methodo exhaustionis*, ed è immediatamente evidente, già da questa dizione preliminare, che per L'Huilier il concetto di *Limite* è completamente esauribile all'interno della stessa proprietà di esaustione.

Abbiamo visto in precedenza che MacLaurin fondava la nozione di *Limite* sul fatto che una grandezza aveva la possibilità di approssimarsi alla grandezza-limite in modo tale che la differenza potesse risultare piú piccola di una qualsiasi grandezza opportunamente fissata piccola a piacere. In questo senso il moto di avvicinamento rispettava la proprietà di esaustione in relazione ad un numero illimitato di grandezze fissate.

L'Huilier ritiene che questa peculiarità possa permettere di fondare la nozione di grandezza indeterminata. Infatti quest'ultima risulterebbe tale proprio perché rispetta la proprietà di esaustione: fissata una grandezza, per quanto essa sia piccola, la proprietà di esaustione prescrive che sia possibile fissarne una ancora più piccola, quindi, se si esprime con un simbolo indeterminato questa caratteristica non si fa altro che tradurre mediante un simbolo la caratteristica dinamica della stessa proprietà di esaustione. Il tutto completamente all'interno di una logica algebrica.

Quindi, secondo L'Huilier, considerare i differenziali come simboli relativi a grandezze indeterminate non significa altro che introdurre nel calcolo una specifica condizione che viene formulata in conformità del rigore classico: *Jam vero ponatur, mutationem* Δx *posse fieri minorem quacumque quantitate proposita* [27].

L'Huilier porta alle sue conseguenze logiche tale impostazione e sostiene che il simbolo dy/dx deve essere considerato un simbolo unico che rappresenta la derivata, quindi il coefficiente angolare della tan-

[27] Cfr. ivi, p. 27 ss.

gente (in conformità della dimostrazione di esistenza che Leibniz aveva dato basandosi sul Principio di continuità) ma in nessun caso poteva essere considerato composto da simboli matematicamente autonomi, quali potevano essere i simboli dy e dx considerati separatamente. In sostanza questi ultimi avrebbero dovuto essere considerati semplici parti grafiche dell'unico simbolo dy/dx [28].

L'Huilier con la sua *dissertazione* pensa di aver raggiunto due obiettivi. In primo luogo quello di mostrare che le serie analitiche potevano essere considerate benissimo da un punto di vista algebrico (all'epoca l'ostacolo principale per una prospettiva di questo tipo era rappresentato dall'operatore differenziale). In secondo luogo quello di far vedere che anche la metafisica globalistica del nuovo calcolo si serviva di apparati intuitivi compatibili con l'impostazione classica rappresentata dalla proprietà di esaustione.

La *memoria* di L'Huilier, ed anche le altre *memorie* concorrenti al *Bando*, codificano il problema del rigore relativamente al formalismo delle serie analitiche ed alla teoria dei limiti. Tuttavia non rendono ragione della natura composita della matematica, così come si era affermata all'epoca. In sostanza non rendono ragione dell'uso nella pratica matematica dell'*analysis situs*, quindi degli *enigmi* connessi a quest'ultima prospettiva relazionale [29].

Condorcet fotografa molto bene la situazione elastica ed enigmatica tipica della matematica dell'epoca.

Egli aveva scritto un *Traité du calcul intégral* e successivamente un secondo *trattato* con lo stesso titolo rimasto incompiuto. L'obiettivo è quello di codificare le differenti possibilità di approccio alla nozione di funzione.

[28] L' Huilier si esprime in questo modo: « Maximopere vero cavendum est, ne credeamus symbolum $d \cdot x^n/dx$, quod formam magnitudinis ex duabus compositae prae se fert, revera esse symbolum compositum; ac designare fractionem, cujus termini sint $d \cdot x^n$ et dx; quasi $d \cdot x^n$ et dx denotent certas quantitates ... Expressio $d \cdot x^n/dx$ incomplexa est atque peculiaris, ac designandos exponentes limitum rationum simultaneorum quantitatum mutabilium X^n et X incrementorum facilitatis causa introducta ... ». Cfr. *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris*, cit., p. 36.

[29] Relativamente alle altre *memorie* cfr. soprattutto W. J. G. Karsten, *Anfangsgründe der mathematischen Analysis und höhern Geometrie, mit Rücksicht auf eine Preisfrage vom Mathematisch-Unendlichen. (Des Lehrbegriffes der gesamten Mathematik zweyten Theils zweyte Abteilung)*, Greifswald 1786; M. N. Landerbeck, *Disputatio solutionem quaestionis cujusdam de maximis vel minimis exhibens*, Upsala 1800.

In questo contesto Condorcet intende per funzione analitica un oggetto matematico per cosí dire dai contorni sfumati ed in cui il termine analitico non sta affatto a designare la possibile sviluppabilità formale in serie analitica ma soltanto il fatto che tali oggetti rientrano nella considerazione dell'analisi.

Condorcet individua tre gruppi che rappresentano altrettanti tipi di funzioni: quelle di cui si conosce la forma, cioè a dire le *funzioni esplicite*; quelle introdotte da *equazioni*, cioè *funzioni implicite*; e quelle introdotte solo da determinate *condizioni concrete*, ad esempio le *equazioni differenziali* rappresentanti le condizioni del problema delle corde vibranti. Condorcet, analogamente ad Euler, ritiene che lo studio matematico di questi diversi gruppi di funzioni debba essere ricondotto, per quanto è possibile, ad una formalizzazione rigorosa: il concetto di funzione dovrebbe essere formalmente rappresentabile mediante la serie di Taylor. Tuttavia l'indagine matematica non può evitare di imbattersi in funzioni che non si lasciano dominare da questo tipo di rigore, tali sono ad esempio le funzioni introdotte da equazioni differenziali alle derivate parziali, ed in quest'ultimo caso, sempre secondo Condorcet, occorre riconoscerne la piena legittimità matematica anche in assenza di criteri formali omogenei per trattarle [30].

La *codificazione* di Condorcet mette in evidenza la necessità di affrontare quel campo di funzioni che si trovano fuori dalla portata del rigore formale e che richiedono un approccio basato sull'*analysis situs*.

Ancora piú precisa, lungo questa direzione, è la posizione di Arbogast che fu pressoché contemporaneo di Lagrange. Infatti il suo *Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires...* fu pubblicato nel 1791 cioè sei anni prima della *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange, tenendo però presente che quest'ultima opera si basa su di uno schema teorico che Lagrange aveva già tratteggiato nel 1772.

L'attenzione di Arbogast è proprio diretta a quelle *fonctions arbitraires* che si trovano fuori dallo schema formale di Lagrange. È chiaro che, in questo contesto, occorre descrivere metafisicamente, cioè in un

[30] Notizie bibliografiche su Condorcet unitamente ad un'analisi sul concetto matematico di *funzione* si trovano in A. Yuskevic, *La notion de fonction chez Condorcet*; in R. Cohen e altri (a cura di), *For Dirk Struik*, Dordrecht 1974, pp. 131-139. Per un confronto testuale cfr. M. A. Condorcet, *Traité du calcul intégral*, Paris 1765, soprattutto p. 6 ss.

certo senso prefigurare globalisticamente, le condizioni della continuità e della discontinuità.

La cosiddetta *legge di continuità* di Arbogast prescrive che una quantità non possa passare da uno stato all'altro senza passare attraverso tutti gli stati intermedi che sono soggetti alla stessa legge. E questo rappresenta un evidente ritorno al principio di continuità di Leibniz. Nello stesso modo, sempre secondo Arbogast, la discontinuità è rappresentata dai due modi fondamentali mediante i quali la legge può essere vanificata. In primo luogo quando la funzione cambia la sua forma, questo è il caso formale della discontinuità di una funzione se è rappresentabile da piú espressioni analitiche. In secondo luogo quando le differenti parti di una curva (esprimente la funzione) non si congiungono affatto tra loro. Arbogast chiama le prime *funzioni discontinue* (sono discontinue nel senso dato da Euler nel 1748) le seconde le chiama *discontigue* (trattasi di funzioni discontinue nel nostro senso attuale). Entrambi i tipi di funzioni, sempre secondo Arbogast, compaiono nell'integrazione delle equazioni differenziali, infatti il caso dell'equazione delle corde vibranti, cosí come appare nel dibattito Euler-d'Alembert, rappresenta un esempio di funzione che *cambia la sua forma* [31].

L'aspetto piú interessante della metafisica di Arbogast riguarda le *funzioni discontinue* (ricordiamo ancora che la dizione *discontinuo* è usata da Arbogast in senso euleriano) in quanto vengono trattate applicando il *principio di continuità* di Leibniz direttamente alla relazione funzionale.

Avevamo già visto che il principio di continuità, presso Leibniz, interessa direttamente la nozione di mutamento, tuttavia viene applicato esclusivamente alle quantità interessate eventualmente da dipendenze funzionali. In sostanza viene asserito in primo luogo che una quantità non può passare da uno stato all'altro senza passare attraverso

[31] Cfr. L. F. Arbogast, *Mémoire sur la nature des fonction arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles*, Pietroburgo 1791, p. 9 ss. La *Memoria* di Arbogast risultò vincitrice di un bando a premio emesso dall'Accademia di Pietroburgo nel 1787. Il premio era per la migliore soluzione del problema di determinare *se le funzioni arbitrarie cui si perviene mediante l'integrazione di equazioni a tre o piú variabili rappresentino delle curve o superfici qualunque, sia algebriche o trascendenti, sia meccaniche, discontinue o generate da un movimento arbitrario della mano; o se queste funzioni comprendano soltanto delle curve continue rappresentate da un'equazione algebrica o trascendente.*

tutti gli stati intermedi che sono soggetti alla stessa legge (concezione presente anche presso Arbogast), in secondo luogo che, date due successioni di valori (che rappresentano quantità) interessate da una data dipendenza funzionale, il passaggio da uno stato ad un altro in ognuna delle due successioni di valori, inclusi tutti gli stati intermedi, conserva la medesima dipendenza funzionale.

Dobbiamo ricordare che, proprio in virtú di questo principio, presso i matematici dell'epoca, si riteneva che se una funzione era rappresentabile mediante una data espressione analitica in un tratto del suo dominio, allora doveva essere rappresentabile dalla stessa espressione analitica in tutto il dominio. Ed era precisamente questa convinzione, come abbiamo già visto, che provocava, relativamente al dibattito sulle corde vibranti, una sorta di impasse nella comprensione del concetto di funzione. Si ottenevano funzioni che in un tratto del loro dominio rispettavano il teorema dell'inversione (erano rappresentabili da un'unica espressione analitica) ma nei punti di raccordo con tratti successivi non rispettavano piú il teorema e non vi era piú un'unica espressione analitica atta a rappresentarle [32].

Arbogast descrive questo tipo di discontinuità servendosi del principio di continuità di Leibniz ed applicandolo direttamente alla relazione funzionale. Cosí come per Leibniz campi di quantità possono essere oggetto di mutamento rimanendo soggetti alla stessa relazione

[32] Relativamente a questo problema (il riferimento specifico è a J. Bernoulli) Lebesgue esprime in tal modo l'intiera questione: « Siccome si ammetteva che due espressioni analitiche uguali in un intervallo sono uguali dappertutto, si ammetteva che era sufficiente dare una funzione con una definizione analitica in un intervallo, per quanto piccolo, perché essa fosse per ciò stesso determinata anche in tutto il suo dominio di esistenza. Da qui il nome di *funzioni continue* dato da Euler a queste funzioni. È solo dopo Cauchy che il termine *funzione continua* ha acquisito il senso attuale. La proprietà che Euler pensava di riconoscere nelle sue *funzioni continue* è quella che caratterizza le funzioni analitiche di una variabile complessa. Fino a Weierstrass, che fece vedere come due espressioni analitiche di una variabile complessa possono essere uguali in un dominio senza esserlo dappertutto, si ammetteva generalmente che questa continuità euleriana appartenesse ad ogni funzione di variabile complessa definita da un procedimento analitico ». Cfr. H. Lebesgue, *Leçon sur les séries trigonométriques*, Paris 1906, p. 21.

Occorre tener presente però che l'ultima affermazione di Lebesgue deve essere alquanto attenuata: già prima di Weierstrass il concetto di continuità euleriano entra in crisi. Arbogast dà una prefigurazione metafisica di una *continuità* in senso moderno.

funzionale con altre quantità (che ovviamente mutano in conformità della stessa legge), allo stesso modo una data dipendenza funzionale può mutare (anche continuamente) la propria rappresentabilità formale, ad esempio può mutare la propria *espressione analitica*, quindi essere *discontinua* secondo la definizione di Euler del 1748, manifestando tuttavia una precisa continuità fondata sulle condizioni concrete che l'hanno determinata.

Ovviamente, in questo impianto, i noti controesempi, consistenti nel fatto di avere una funzione rappresentabile da una data espressione analitica in un tratto e non piú tale in eventuali punti di raccordo, rientrano perfettamente nel canone di spiegazione basato sull'istanza metafisica del movimento.

L'eccedenza di contenuto della spiegazione metafisica nei confronti della formalizzazione analitica permette di inferire che si ha a che fare con una funzione che, pur presentando discontinuità formali, ha una sua continuità concreta: precisamente si ha a che fare con una funzione concretamente continua che muta la sua forma.

Non soltanto l'impostazione, come già aveva fatto Boscovich, tende a distinguere nel nostro senso attuale le curve discontinue da quelle continue, separando conseguentemente il concetto di derivabilità da quello di continuità, ma altresì mette in evidenza un punto cruciale per la pratica matematica dell'epoca: l'*analysis situs* costituisce un fondamento la cui estensione si rivela capace di riepilogare globalmente il campo relazionale della matematica.

Dunque la *geometria di posizione* assume una connotazione prioritaria che riflette l'affermarsi della nuova logica delle relazioni.

Stante il valore assunto dall'approccio relazionale nella matematica dell'epoca, la comparsa di *Théorie des fonctions analytiques* si rivela alquanto atipica. Lagrange, infatti, rovescia completamente il ruolo della geometria (quindi dell'*analysis situs*) nella matematica: in luogo di considerarla un fondamento primo in grado di riflettere globalmente il concreto, la considera una vera e propria branca derivabile dall'approccio funzionale.

Lagrange, che tra l'altro era stato l'ispiratore del *Bando*, ritiene estremamente rilevante l'obiettivo di L'Huilier di algebrizzare la serie di Taylor. Obiettivo che Lagrange stesso si era prefissato già dodici anni prima; anzi si può ragionevolmente supporre che gli interventi di Lagrange presso l'Accademia per determinare e mettere a punto i contenuti del *Quesito* del 1784 fossero orientati da quegli stessi punti di vista che egli aveva codificato in precedenza [33].

In questo senso Lagrange ritiene che i risultati ottenuti da L'Huilier debbano essere completati. Non sarebbe sufficiente infatti mostrare che la serie analitica (serie di Taylor) sia composta da termini interpretabili algebricamente; infatti occorrerebbe far vedere in primo luogo che qualsiasi funzione risulta effettivamente traducibile (mediante una procedura algebrica) in una serie di Taylor. Solo in questo modo — sempre secondo Lagrange — si può raggiungere l'obiettivo di fornire al concetto matematico di funzione un solido fondamento algebrico.

Da quanto abbiam detto ci risulta evidente che questo aspetto mancava completamente nell'impostazione di L'Huilier. Anzi L'Huilier presupponeva implicitamente che non fosse possibile ottenere un risultato di questo tipo: vi erano funzioni non riducibili, quindi l'impostazione fondazionale doveva tenerne conto ragionando, oltre che nei termini di una riduzione alla serie di Taylor, anche nei termini di una piú estesa metafisica fondazionale. In questo senso l'Huilier continuava ad usare la *teoria dei limiti*, quindi la *geometria del moto*.

Al contrario Lagrange si prefigge di rendere piú rigorosa la prima prospettiva di L'Huilier, abbandonando completamente la sua seconda prospettiva. Con ciò venivano esclusi tutti quei problemi (originati dal dibattito sulle corde vibranti) che si collocavano ai confini della prospettiva formale. Problemi la cui rilevanza era già stata avvertita da Euler e che avevano determinato, in sede di prefigurazione metafisica, risposte sempre piú sofisticate ed in grado di anticipare lo studio *a tratti* di una funzione discontinua [34].

Lagrange, che pure era intervenuto anni prima nel dibattito sulle corde vibranti, mostra di non attribuire un peso determinante a problemi di questo tipo, per cui si accinge, nella sua *Théorie des fonctions analytiques*, ad affrontare il problema del *rigore* limitatamente a quelle funzioni che erano rappresentabili mediante serie analitiche, le sole

[33] Lagrange nel 1772 aveva impostato un programma di questo tipo nel suo lavoro *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la differentiation des quantités variables*, ora in *Oeuvres* a cura di J. Serret, G. Darboux e altri, 14 voll., Parigi 1867-1892, vol. III, pp. 439-470.

[34] Ovviamente trattasi di *funzioni* considerate *discontinue* nel senso dato da Euler nel 1748 e che venivano distinte dalle ulteriori *funzioni discontigue*, cioè da quelle funzioni che presentavano *discontinuità* nel nostro senso attuale.

ad avere una certa legittimità formale quindi le sole, secondo Lagrange, ad essere certamente di competenza matematica [35].

In questo senso la prospettiva di Lagrange ruota sull'idea di fondo già codificata da L'Huilier: quella di considerare i simboli x e i come *simboli indeterminati*. Su questa base Lagrange si propone, data una funzione qualsiasi f (x), di dedurre la sua rappresentabilità in una serie di Taylor.

Dunque se consideriamo una funzione qualsiasi f (x) di una variabile qualunque x, e al posto di x sostituiamo $x + i$ (essendo i una grandezza indeterminata) la funzione diventerà f $(x + i)$, quindi, per la teoria delle serie, si otterrà l'espressione generale f $(x) + p\,i + q\,i^2 + r\,i^3 + \ldots$.

Come è noto questo è il passo decisivo di Lagrange; tuttavia questa possibilità richiederebbe delle ipotesi restrittive che tolgonò all'intiera procedura quella generalità che Lagrange stesso intendeva attribuirle. D'altronde Lagrange si rende perfettamente conto del problema ma ritiene, come abbiamo già avvertito, che le eventuali funzioni destinate ad essere escluse da questa possibilità non siano matematicamente significative ([36]).

A questo punto, dato che la serie f $(x) + p\,i + q\,i^2 + r\,i^3 + \ldots$ è stata ottenuta esclusivamente con un procedimento algebrico e tenendo presente che p, q, r, etc., sono funzioni con determinati requisiti, se si riesce a stabilire una corrispondenza di un certo tipo tra queste funzioni e le funzioni derivate di f (x), si sarà ovviamente dimostrato che ogni funzione, ricorrendo a *grandezze indeterminate*, è sviluppabile algebricamente in una serie di Taylor.

Tenendo presente la formula generale f $(x + i) =$ f $(x) + p\,i + q\,i^2 + r\,i^3 + \ldots$, ed introducendo una ulteriore grandezza indeterminata o (indipendente da i), supponendo che x divenga $x + o$, quando si passa a calcolare f $(x + i + o)$ si ottiene lo stesso risultato sia che si sostituisca i con $i + o$ sia che si sostituisca x con $x + o$.

[35] Lagrange pubblica la sua *Théorie des fonctions analytiques* nel 1797, quindi la pubblica sotto l'evidente influsso del dibattito culturale successivo al *Bando* del 1784. In tal modo contrariamente a L'Huilier (la cui *dissertazione* era risultata vincitrice del concorso) Lagrange non partecipa direttamente al *Preisaufgabe*, piuttosto si propone di sviluppare definitivamente un tema, che egli riteneva il piú importante, già affrontato dalla *dissertazione* vincitrice.

[36] Cfr. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, Imprimirie de la République, Paris 1797, p. 7 ss.

Confrontando i due risultati Lagrange ottiene che $p = f'(x)$, $2q = p'$, $3r = q'$, quindi usando le notazioni f″, f‴, etc., ottiene la serie di Taylor:

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)\,i + \frac{f''(x)}{2}\,i^2 + \frac{f'''(x)}{3'}\,i^3 + \ldots$$

dove le funzioni $f'(x)$, $f'''(x)$ indicano rispettivamente le *derivate*, *prima*, *seconda*, *terza*, etc., della $f(x)$.

In tal modo dato che i termini della serie dipendono gli uni dagli altri, allorché si sa formare la prima funzione derivata si ha parimenti la certezza di poter formare tutte le funzioni derivate contenute nella serie [37].

Con questo Lagrange dimostra che la serie di Taylor può costituire un fondamento algebrico atto a rappresentare, in modo formalmente rigoroso, il concetto matematico di funzione. Si tratta di portare a compimento quello stesso programma che Euler aveva già anticipato nella sua *Introductio* del 1748.

Su questa base la stessa geometria superiore e la meccanica possono essere dedotte quali semplici branche del piú generale calcolo funzionale.

La *Théorie des fonctions analytiques* tenta, in certo qual modo, di ripristinare le certezze che avevano attraversato la matematica alla comparsa dell'*Introductio* del 1748. Ma per far questo è costretta a non attribuire rilevanza matematica a tutta la provincia delle funzioni atipiche emerse dopo il dibattito sulle corde vibranti.

Il risultato è la completa sottovalutazione di quei problemi cruciali che avevano determinato il recupero dell'*analysis situs* ed i cui enigmi avevano favorito la partizione epistemologica fra scienze estensionali e scienze relazionali.

Infatti l'assunzione del punto di vista funzionale finisce per provocare drastiche restrizioni nell'ambito della pratica matematica: era proprio l'emergere del punto di vista relazionale che, come abbiamo già avuto modo di vedere, aveva permesso la possibilità di uno studio a tratti delle funzioni ed aveva permesso la trattazione indipendente delle nozioni di derivabilità e di continuità.

In questo senso Carnot, nelle sue *Réflexions*, si oppone alla rigi-

[37] Cfr. ivi, p. 17 ss.

dità epistemologica, segnata dall'approccio funzionale, e cerca di fondare una relativa compatibilità fra i due punti di vista.

Vi sarebbero due modi distinti di considerare le *grandezze.* Nel primo caso si avrebbero le *quantità indicate*, segnate dall'approccio estensionale, nel secondo caso le *quantità sussidiarie*, segnate dall'approccio relazionale [38].

La doppia prospettiva, sempre secondo Carnot, implicherebbe un duplice modo di intendere le cosiddette *quantità infinitamente piccole*: nel primo caso il loro valore risulterebbe *zero*, quindi sarebbe algebricamente *indicato*, nel secondo caso risulterebbero assegnabili in ragione di *simboli di relazione* quali i *differenziali* [39].

Con il che viene ripresa integralmente la partizione di Euler tra metodo geometrico (relazionale) e metodo aritmetico (estensionale) traducendola nell'equivalente partizione tra grandezze sussidiarie (relazionali) e grandezze indicate (estensionali).

Il calcolo con gli zeri, dato che considera il valore aritmetico, risulta algebricamente rigoroso. Infatti l'azzeramento non implica alcuna alterazione delle identità algebriche ed è fatto in conformità della proprietà di esaustione. In questo senso il simbolo $0/0$ sarebbe dotato di un significato algebrico, analogo, in una certa misura, a quello rappresentato dagli *immaginari.* Nessuno infatti mette in dubbio la relazione $\sqrt{-a} = \sqrt{-b} \cdot \sqrt{a/b}$ cosí come nessuno mette in dubbio la relazione $60 = 20 + 40$.

Quello che conta è la funzione dei simboli nello stabilire identità algebriche rigorose [40].

Il calcolo con i differenziali (quantità sussidiarie), dato che si regge su simboli introdotti *ad hoc*, altera il rigore delle identità algebriche, tuttavia, sempre secondo Carnot, diviene legittimo sopportare una situazione di incongruenza se si ha la certezza che almeno ad un certo limite questa viene eliminata. Ed il calcolo differenziale garantisce effettivamente questa situazione.

In tal modo la *teoria della compensazione* e la *teoria delle equazioni imperfette* sono inserite da Carnot in una prospettiva che segna

[38] Cfr. Carnot, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Paris 1797, soprattutto parr. 14-17, 19 e 40.

[39] Cfr. ivi, par. 41.

[40] Ivi, par. 46.

la formulazione di un Principio di corrispondenza tra la *teoria differenziale* e la *teoria algebrica* e ciò sulla falsariga di quanto aveva già fatto Euler a proposito del metodo geometrico (caratterizzato dai differenziali) e dal metodo aritmetico (caratterizzato dagli zeri)[41].

In tal modo, al compimento del secolo, viene sancita la separazione netta, all'interno della matematica, tra due punti di vista opposti; la loro relativa incongruenza, con tutti gli enigmi che abbiamo toccato nel nostro *excursus*, viene in qualche modo resa sopportabile in virtú di metafisiche di corrispondenza. In sostanza viene sancito il fatto che il rigore può, in certo qual modo, essere spezzato in differenti punti di vista purché, ad un certo limite e relativamente ad un piano complessivo, si realizzi una relativa adeguatezza.

[41] Ivi, parr. 31, 34, 40 e 44.

Parte II

HEGEL INTERPRETE DELLA SUA EPOCA

INTRODUZIONE

Riteniamo che il problema della matematica, presso Hegel, rivesta una importanza difficilmente sottovalutabile.

Infatti risulta perlomeno innegabile l'influenza, esercitata dagli studi matematici, sulla stessa formazione logica del filosofo di Stoccarda.

Anche se ci risulta impossibile valutare pienamente questo aspetto data la specificità del nostro lavoro (per essere adeguati in questo senso occorrerebbe effettuare una appropriata indagine anche sugli altri campi della prassi umana oggetto di riflessione da parte del filosofo) tuttavia dobbiamo ricordare che, nella *Subjective Logik*, proprio il metodo matematico viene eletto da Hegel come paradigma della prassi conoscitiva in generale.

Dobbiamo altresí ricordare che era proprio l'epistemologia matematica della seconda metà del settecento ad esibire strutture di pensiero estremamente dirompenti per l'epoca e che finivano per poggiare su dei veri e propri paradossi che, in certo qual modo, venivano resi virtuosi.

Nella prima parte del nostro lavoro abbiamo avuto la possibilità di seguire le linee storiche di questi sviluppi.

Uno dei risultati, affermatosi dopo il 1755, consisteva nel riconoscere che il rigore formale aveva la prerogativa di perdere contenuto nei confronti del campo concreto cui si riferisce. E da questo punto di vista la prassi scientifica formale doveva essere corredata di un approccio concreto in grado di rappresentare quello che è andato perduto.

Il conseguente sorgere di un approccio relazionale, collaterale all'usuale approccio funzionale, aveva messo in evidenza il fatto che la scienza matematica si reggeva su doppie asserzioni, in certo qual modo, tra loro incompatibili; e questo aveva determinato la riattualizzazione del vecchio paradosso dell'indistinguibilità di Nieuwentijt, quindi la sua problematicizzazione epistemologica lungo svariate linee di argomenti.

Hegel padroneggiava molto bene questi temi e tenta di comprenderne il valore logico.

Stante quello che abbiamo detto, risulta chiaro come Hegel stesso avesse per oggetto proprio l'epistemologia matematica più che la matematica in senso stretto; e da questo punto di vista si propone come interprete di un'epoca fondata su altrettanti enigmi virtuosi.

Prima di chiudere questo breve cenno di apertura, vorremmo fare una precisazione.

Riguardo alla *Logica* nell'edizione 1812-1816 possediamo l'edizione critica nei *Gesammelte Werke* non così per la revisione del 1831, anche se dovrebbe essere di imminente pubblicazione l'edizione critica della *Dottrina dell'Essere* in quest'ultima redazione: *Die Lehere vom Sein*, hrsg. von F. Hogemann und W. Jaeschke, *Gesammelte Werke*, Bd. 20.

Per questi motivi ci siamo serviti dei *Gesammelte Werke* relativamente all'edizione 1812-1816 e ci siamo serviti dei *Werke* relativamente alla revisione del 1831. Questo per uniformarci ai criteri di citazione presenti negli stessi *Gesammelte Werke.*

CAPITOLO I

LE TAPPE FONDAMENTALI DEL PENSIERO MATEMATICO DI HEGEL

1.1. *I primi orientamenti e le Geometrische Studien.*

Hegel venne a contatto molto presto con i problemi epistemologici dell'infinitamente piccolo, molto prima di occuparsi, con una certa sistematicità, della geometria euclidea e della cosiddetta *reine Mathematik*.

Infatti, se escludiamo le lezioni di geometria impartite dal colonnello Duttenhofer [1], il giovane Hegel, negli ultimi anni di Ginnasio, intraprese studi sistematici sugli scritti del Kaestner e ne ricavò degli estratti.

Questi studi, proprio per il particolare ruolo rappresentato da Kaestner, misero Hegel a contatto con la cultura scientifica di allora. Mentre i quaderni di geometria, meccanica ed ottica ebbero una impronta quasi esclusivamente didattica, al contrario gli scritti di Kaestner permisero ad Hegel di entrare nel vivo e nella piena attualità storica del dibattito sulla *höhere Mathematik*, quindi sul problema dei *differenziali*.

È evidente che le letture dei testi del matematico di Göttingen, durante gli ultimi anni del Ginnasio, non potevano permettere al giovane Hegel di stabilire efficaci collegamenti con lo sviluppo scientifico

[1] Le lezioni furono impartite ad Hegel, che allora aveva dieci anni, con l'intento, voluto dal padre, di accelerare la sua preparazione scientifica e sottrarre il giovane all'ambiente dei cosiddetti *piccoli seminari*. Su questo argomento cfr. K. Rosenkranz, *Hegels Leben*, Berlin 1844, trad. it. *Vita di Hegel*, introduz., trad. e note a cura di R. Bodei, Firenze 1966, p. 28 ss.

dell'epoca. Tuttavia è altrettanto evidente che il giovane discepolo entra in contatto con nozioni estremamente sofisticate che, piú tardi, potrà apprezzare in tutta la loro portata [2].

All'Università di Tubinga dal 1750 al 1782 aveva insegnato logica e metafisica Gottfried Ploucquet ed anche se, all'epoca dell'iscrizione di Hegel avvenuta nel 1788, si era effettivamente ritirato dall'insegnamento già da sei anni, tuttavia aveva lasciato un'eredità culturale estremamente rilevante.

L'impostazione logica di Ploucquet, di tipo estensionale, incontrava non poche difficoltà a fornire efficaci fondamenti a quegli apparati concettuali che rivestivano un ruolo cruciale soprattutto nella teoria differenziale e nella *höhere Mechanik.* In sostanza si riproponevano tutti gli enigmi enunciati da Euler; e questo aveva determinato il sorgere di un alternativo punto di vista relazionale, basato sull'*analysis situs*, sostenuto, come abbiamo visto in precedenza, dallo stesso Kaestner e da Lambert.

La situazione indubbiamente accentuava una certa curiosità teorica per le discipline matematiche. Si trattava di un ambito che, in certo qual modo, spiazzava l'impostazione logica tradizionale, un campo che, per cosí dire, si presentava inesplorato e attraversato dagli enigmi euleriani.

Con questo spirito Hegel si accosta alla matematica di Pfleiderer. Tra l'altro fu lo stesso Pfleiderer, quale decano dell'Università di Tubinga, a conferire ad Hegel il diploma di *Magister* di filosofia [3].

Il maestro di Tubinga realizza una sorta di sintesi tra Colin Mac Laurin ed i temi emersi posteriormente al dibattito sulle corde vibranti. Da questo punto di vista la geometria viene ad essere considerata un fondamento privilegiato in grado di spiegare il simbolismo differenziale nonché tutti quei problemi non padroneggiabili mediante la serie di Taylor.

[2] Da questo punto di vista assumeranno grossa importanza due *estratti* da Kaestner. Il primo *estratto* è relativo al par. 37 delle *Vorerinnerungen von der Mathematik überhaupt und ihrer Lehrart*, in *Anfangsgründe der Arithmetik ...*, cit., parr. 1-39. L'*estratto* di Hegel si trova in *Dokumente zu Hegels Entwiklung*, hrsg. J. Hoffmeister, Stuttgard 1936, p. 107 s. Il secondo *estratto* è relativo alle *Einige Vorlesungen*, sempre di Kaestner, Altenburg 1978 e si riferisce alla *Vorlesung* II, pp. 15-24. Nei *Dokumente*, cit., è riportato a p. 137.

[3] Per eventuali notizie sul ruolo di Pfleiderer quale professore di matematica e filosofia a Tubinga cfr. Rosenkranz, *Hegels Leben*, trad. it. cit., p. 56.

La convinzione di Pfleiderer era che anche le cosiddette funzioni atipiche potessero rientrare nei canoni del rigore segnato dalla proprietà di esaustione, e questo, come abbiamo già detto, implicava il fatto di ritenere la teoria dei limiti (geometria del moto) piú estesa, quanto al suo contenuto, rispetto al contenuto espresso dalla serie di Taylor.

La conseguenza è quella di considerare l'*analysis situs* completamente estranea al rigore matematico. La divaricazione con Kaestner non può essere piú radicale: quest'ultimo considerava il punto di vista estensionale, coperto dalla proprietà di esaustione, un approccio limitato, non in grado di fondare la continuità delle funzioni atipiche emerse dal dibattito sulle corde vibranti, ed il punto di vista della relazione, tipico dell'*analysis situs*, la prospettiva emergente della nuova matematica.

Abbiamo già avuto modo di vedere che la conclusione tipica di questo secondo tipo di approccio, per la verità diffuso presso quasi tutti gli *analisti* dell'epoca, era l'ammissione di un duplice punto di vista all'interno della matematica. E questo si traduceva nella possibilità di doppie asserzioni che, oltre a reggersi su differenti paradigmi di rigore, potevano benissimo essere incongruenti, purché vi fosse una struttura in grado di garantire ad un certo limite una relativa corrispondenza.

Kaestner esprime con forza in tutti i suoi scritti, a cominciare dagli *Anfangsgründe*, questa possibilità; ed ovviamente ad Hegel il contrasto con Pfleiderer non poteva apparire piú netto [4].

Tuttavia il periodo è estremamente proficuo per il giovane studioso in quanto può iniziare lo studio sistematico della *geometria euclidea* e dell'*analisi*, e questo lo porta ad accettare il punto di vista di Kaestner verificandone la portata relativamente ai suoi studi specifici [5].

[4] Ci si può rendere conto immediatamente quanto le due impostazioni risultassero divergenti ove si esamini, in maniera comparata, il testo di Pfleiderer, *Theorematis tayloriani demonstratio*, cit., ed i testi di Kaestner che vanno dagli *Anfangsgründe* su cui Hegel aveva ricavato gli *estratti* agli *Anfangsgründe der Analysis endlecher Grössen*, cit., ed *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*, cit., in cui emerge come punto fondamentale la possibilità di un duplice approccio alla *grandezza*, quello *estensionale* e quello *relazionale*.

[5] In questo periodo, presumibilmente, Hegel prende visione delle tesi di laurea concesse da Pfleiderer sulla *Deduzione euclidea*, ed ebbe modo di specializzarsi riprendendo in mano la *Euklid - Bearbeitung von J. F. Lorenz*, 2. Aufl., Halle 1781, già usata a Stoccarda.

La congiuntura si prospetta molto favorevole per il giovane Hegel in quanto, nel matematico di Göttingen, vi trova sintetizzati pressoché tutti i temi epistemologici connessi con l'emergere del nuovo punto di vista relazionale, quindi può assorbire altresí tutti quei temi, legati ai cosiddetti paradossi della soppressione, che avevano caratterizzato la matematica nella seconda metà del secolo.

Quando Hegel, negli anni a ridosso del 1800, redige a Francoforte le *Geometrische Studien* è già in grado di padroneggiare i temi kaestneriani e di riferirli a contesti specifici [6].

Il filosofo di Stoccarda acquisisce da Kaestner il fatto che la prassi matematica agisce su tre livelli: il livello del calcolo simbolico, rappresentato dalla serie di Taylor, il livello della geometria del moto, cui si riferisce la teoria dei limiti, e che si basa su di un uso mediato della proprietà di esaustione, ed il livello segnato dall'*analysis situs* che deroga dalla proprietà di esaustione e rappresenta l'ingresso della prospettiva relazionale nella matematica. Ed ovviamente, nel terzo caso, diventa centrale il cosiddetto paradosso della soppressione.

Su questa base Hegel, sempre riferendosi a Kaestner, ritiene che a fondamento dell'attività scientifica vi sia la possibilità di formulare doppie asserzioni che, nel caso della matematica, si presenta come possibilità di formulare asserzioni in conformità della proprietà di esaustione od in deroga della stessa proprietà.

Come si può facilmente notare, le convinzioni hegeliane, fondate originariamente sugli scritti di Kaestner, riflettono sostanzialmente quella parte dell'epistemologia matematica, sviluppatasi a partire dall'Euler del 1755, il cui intento era quello di strutturare principi di corrispondenza fra enunciati tra loro, in qualche modo, incompatibili.

Hegel ritiene, sempre nelle *Geometrische Studien*, che la deduzione euclidea rappresenti efficacemente, ed anzi possa fungere da paradigma esemplificativo, della stessa epistemologia matematica affermatasi nella seconda metà del settecento.

Infatti lo studio delle *proposizioni quattro* e *otto* del primo Libro degli *Elementi* permise ad Hegel di individuare due fondamentali nozioni di uguaglianza che in qualche modo potevano riproporre il pro-

[6] Le *Geometrische Studien* costituiscono il primo lavoro organico di Hegel sulla matematica. Cfr. *Dokumente*, cit., pp. 288-300 e 470-473. Sostanzialmente costituiscono un commento al metodo della deduzione euclidea relativamente alle *proposizioni* 1-31 del I Libro degli *Elementi* ed un commento epistemologico alla logica euclidea dell'assiomatizzazione.

blema epistemologico della doppia asserzione, tipico dei recenti sviluppi della matematica.

Euclide usa quasi sempre la nozione di uguaglianza nel senso di quella che oggi intendiamo geometricamente come *equivalenza*, cioè come una uguaglianza solo *in estensione*. In questo senso la seconda e terza *nozione comune* ne regolano le caratteristiche logiche: ad esempio viene affermato che se cose uguali sono addizionate a cose uguali allora le totalità sono pure uguali e cosí via.

È ovvio che l'uguaglianza in senso stretto di due figure non rispetta sempre le condizioni logiche previste dalle nozioni comuni due e tre, in quanto ad esempio la somma di due triangoli equivalenti può dare origine sia ad un triangolo che ad un quadrato. Le due figure possono ritenersi equivalenti, quindi rispettano le condizioni logiche delle *nozioni comuni* solo se il punto di vista dell'*uguaglianza* viene fatto valere relativamente alla loro estensione (superficie), non lo rispettano se l'uguaglianza viene fatta valere relativamente alla richiesta di una coincidenza di tutti gli elementi delle figure (lati e vertici ciascuno a due a due coincidenti, etc.) infatti gli elementi del quadrato e gli elementi del triangolo non possono coincidere o sovrapporsi a due a due. A questo proposito Euclide ritiene che la dimostrazione dell'uguaglianza in senso stretto possa avvenire tramite una procedura di trasposizione meccanica di una figura sull'altra, ed usa detta procedura dimostrativa non solo relativamente alle proposizioni quattro ed otto del Libro primo, ma anche nella proposizione ventiquattro del Libro terzo.

Hegel ritiene che questi aspetti peculiari della trattazione euclidea riflettano il principio logico di spiegazione tipico delle *teorie di corrispondenza*.

Il caso dell'uguaglianza in estensione può essere rappresentato dalla fase logica A = non A, in cui può essere posta l'uguaglianza tra due cose qualitativamente differenti solo in quanto viene fatto valere un punto di vista povero, cioè quello della semplice estensione, che annienta completamente le differenze qualitative. Il caso corrispondente è quello del calcolo simbolico rappresentato, nella moderna analisi, dalla serie di Taylor.

Al contrario l'uguaglianza in senso stretto può essere rappresentata dalla fase logica A = A in cui si può dire di avere a che fare con una stessa cosa (senza alcuna possibilità di distinzione) solo in quanto le nozioni originarie sono state opportunamente tradotte nell'ambito del moto (trasposizione meccanica di una figura sull'altra). Il caso corrispondente è quello rappresentato dalla moderna geometria del moto, quindi dalla teoria dei limiti, che tiene ferma la proprietà di esaustione solo in virtú di una sua traduzione nell'ambito del movimento, sancendone quindi una sua applicazione mediata.

Secondo Hegel il punto di vista della relazione è espresso dalla logica di formulazione degli assiomi che, da un certo punto di vista, rifletterebbero le medesime istanze epistemologiche delle cosiddette procedure di *raddoppiamento della secante* in cui l'emergere dell'aspetto relazionale (differenziali) implica un corrispettivo processo di soppressione del concreto (soppressione dell'aspetto estensivo della grandezza).

L'occasione è offerta ad Hegel dal cosiddetto dibattito sul quinto postulato (assioma delle parallele) che poneva il problema di una dimostrazione di indipendenza. Kaestner aveva già toccato il problema in *Geometriae Euclidis primam quae post inventam typographiam prodiit editionem breviter describit* (1750) e Klügel in *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* (1763), riferendosi al suo maestro Kaestner, aveva ribadito la funzione dei postulati quali presupposti per eventuali dimostrazioni e non viceversa. Lambert in *Die Theorie der Parallelinien*, scritta nel 1766 e pubblicata da J. Bernoulli nel 1786, aveva sostenuto che, proprio per il fatto che i postulati sono dei presupposti, le ipotesi dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso possono essere entrambe congruenti in relazione ad una geometria sferica che rappresenta un altro universo rispetto alla geometria piana (l'angolo acuto risulterebbe pertinente ad una superficie sferica di raggio immaginario)[7].

Hegel ritiene che il problema possa essere ricondotto al paradosso della soppressione implicito, come abbiamo già avuto modo di vedere, nell'impostazione relazionale dell'*analysis situs*.

Infatti gli assiomi non farebbero altro che prefigurare un universo di relazioni epurato preventivamente dalla concretezza: si opera mediante punti senza dimensioni, linee senza spessori, ecc. È la costruzio-

[7] Cfr. A. G. Kaestner, *Geometriae Euclidis primam quae post inventan typographiam prodüt editionem brevitur describit*, Lipsiae 1750; G. S. Klügel, *Conatuum praecipuorum theoriam parallelorum demonstrandi recensio*, Göttingen 1763; J. H. Lambert, *Theorie der Parallelinien*, l'originale manoscritto del 1766 fu pubblicato da J. Bernoulli, discendente ed omonimo del piú famoso J. Bernoulli contemporaneo di Leibniz, professore di matematica presso l'Accademia di Berlino; l'edizione è del 1786. Noi ci siamo serviti dell'edizione curata da F. Engel e P. Stäckel, Leipzig 1895.

ne di un mondo relazionale in cui valgono precise regole che implicano l'unicità della parallela.

Voler corredare di una dimostrazione questa fase, secondo Hegel, implicherebbe la stessa incongruenza che si incontra quando si vuole giustificare il rappporto differenziale dy/dx mediante il metodo sequenziale del raddoppiamento della secante: trattasi della pretesa di dedurre dall'ambito estensionale un punto di vista relazionale che implica la soppressione dell'estensione stessa.

Come si può notare Hegel, ancora una volta, fa valere il medesimo punto di vista di Kaestner, e del Lambert della *Disquisitio*, secondo cui l'emergere della logica relazionale implica una prospettiva completamente non giustificabile sulla base della vecchia logica estensionale. E questo significa, da parte di Hegel, l'accettazione dei risultati fondamentali rappresentati, come abbiamo già visto, dall'epistemologia matematica della seconda metà del settecento.

Inoltre Hegel, su questa base, riprende la stessa partizione che Kaestner aveva concorso ad affermare nell'ambiente di Göttingen, secondo la quale la linea di demarcazione tra scienze estensionali e scienze relazionali finisce per attraversare orizzontalmente le stesse discipline specifiche, senza alcun riguardo alla partizione classica tra scienze matematiche e scienze empiriche.

La prospettiva estensionale, come avviene nella deduzione euclidea, si basa su traduzioni delle nozioni originarie in altri ambiti, ad esempio, relativamente alle proposizioni quattro e otto del primo Libro degli *Elementi*, la traduzione avviene nell'ambito generativo del movimento. Per cui resterebbe una contrapposizione, tra ambiti nozionali differenti, risolta solo formalmente dai criteri convenzionali mediante cui avviene la stessa traduzione [8].

Al contrario la prospettiva relazionale, segnata dalla logica degli assiomi o dei differenziali, annienterebbe completamente l'ambito originario identificando una situazione, già evidenziata dal paradosso epistemologico di Nieuwentijt a proposito della nozione di sezione, che implica il sorgere di un nuovo punto di vista.

[8] Hegel riprende, poco tempo dopo, il suo punto di vista sostenuto nelle *Geometrische Studien* per caratterizzare la *geometria analitica* come il frutto di una t r a d u z i o n e della *teoria algebrica* nell'ambito della *geometria.* Cfr. *Dissertatio Philosophica de Orbitis Planetarum.* Noi ci siamo serviti dell'ottima edizione critica curata da W. Neuser, *Dissertatio Philosophica de Orbitis Planetarum, Übersetzt, eingeleitet und kommentiert von Wolfang Neuser*, Weinheim 1986, p. 84.

È chiaro, sempre secondo Hegel, che la prospettiva estensionale risulta più povera nei confronti della corrispettiva prospettiva relazionale; infatti la prima, rimanendo intrappolata in una semplice contrapposizione, non riesce a far emergere completamente il nuovo punto di vista. Tuttavia in entrambi i casi si avrebbe una limitazione.

Sotto questo aspetto risulterebbe facilmente identificabile il nocciolo dell'attività scientifica. Secondo quanto già enunciato da Euler, Boscovich, Kaestner e Lambert, alla base vi sarebbe la possibilità di una doppia asserzione che si traduce in una incongruenza tra i punti di vista che vengono fatti valere.

Il fatto che l'epistemologia scientifica tenti di ovviare alla situazione enunciando dei *principi di corrispondenza* tra gli enunciati incompatibili, significa solo il tentativo di occultare il problema mediante definizioni, formulate *ad hoc*, che non rendono affatto ragione dell'enigma implicito nella procedura.

Spetterebbe alla riflessione filosofica rendere ragione del fatto che la verità scientifica si regge sulla possibilità di asserire cose tra loro incompatibili, proprio per il fatto che la stessa verità scientifica è incapace di rendere ragione di una prospettiva complessiva. È incapace, quindi, di accettare l'enigma come un fatto logico fondamentale tentando, come ha fatto Euler o Lambert, di occultarlo mediante *definizioni ad hoc.*

Nella *Differenz des Fichte'schen und Schelling'schen Systems der Philosophie*, pubblicata subito dopo l'arrivo a Jena, Hegel raccoglie le osservazioni francofortesi sull'uguaglianza euclidea ritenendole un punto di vista irrinunciabile per ogni riflessione filosofica sulla scienza. Un intiero paragrafo, che Hegel titola molto significativamente *Prinzip einer Philosophie in der Form eines absolute Grundsatzen*, viene dedicato a quello che può essere ritenuto, sempre a detta di Hegel, un vero e proprio dilemma dell'attività scientifica: il rigore e la coerenza formale possono essere raggiunti solo a prezzo di un drastico ridimensionamento del contenuto. Se noi formalizziamo simbolicamente un campo della realtà, mediante le relazioni $A = A$ e $A = B$, facciamo valere un punto di vista locale che rappresenta già la definitiva rinuncia al contenuto complessivo del campo che stiamo indagando [9].

[9] Cfr. in *Jenaer Kritische Schriften*, hrsg. von H. Buchner und O. Pöggeler, in *Gesammelte Werke*, hrsg. im Auftrag der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Bd. IV, Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1968, pp. 5-92, *Differenz des Fichte'schen*

1.2. *Il periodo di Jena.*

A Jena Hegel si associa subito alle varie Accademie di Scienze Naturali (tra l'altro fu amico personale del fisico Thomas Seebeck scopritore della termoelettricità) con l'intento di trovare delle conferme, per cosí dire, sul campo della partizione tra la prospettiva estensionale e relazionale già verificata a Francoforte relativamente al metodo euclideo [10].

In questo periodo Hegel raggiunge una conoscenza pressoché completa del dibattito sui differenziali susseguente al *Preisaufgabe* del 1784 bandito dall'Accademia di Berlino.

E sulla scorta dei risultati, raggiunti sempre a Francoforte, ritiene che il problema epistemologico fondamentale, relativamente alla matematica, sia costituito dal fatto di rendere ragione della nuova prospettiva relazionale in quanto soppressione della classica prospettiva estensionale.

Per quel che riguarda il periodo della cosiddetta scoperta del calcolo differenziale, Hegel, oltre ai *Principia* di Newton, si riferisce soprattutto ad *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* (Paris 1696) in cui l'Hospital traccia una sorta di piano complessivo della teoria differenziale di Leibniz. Trattandosi di una esposizione in larga misura divulgativa, la metafisica leibniziana risulta alquanto semplificata e non vi compaiono affatto le sottili distinzioni teoriche presenti ad esempio nei manoscritti parigini e nella cosiddetta geometria di posizione dello stesso Leibniz.

Su questa base Hegel si costruisce la convinzione che Leibniz abbia interpretato i differenziali esclusivamente come *grandezze infinitesime*, quindi le abbia interpretate da un punto di vista estensionale. Ed anzi Hegel legge le *Considerationes* (1694) di Nieuwentijt, originariamente dirette contro i differenziali di Leibniz, esclusivamente in relazione all'esposizione divulgativa che di questi ultimi aveva dato l'Hospital. In questo senso Hegel ritiene senz'altro le *Considerationes* come il lavoro che senza ombra di dubbio ha efficacemente messo in luce il

und Schelling'schen Systems der Philosophie. Soprattutto il paragrafo *Prinzip einer Philosophie in der Form eines absoluten Grundsatzen*, p. 23 ss.

[10] Cfr. Thomas Hearing, *Hegel, sein Wollen und sein Werk, Eine chronologische Entwicklungsgeschichte der Gedanken und der Sprache Hegels*, Leipzig-Berlin 1929, vol. I, p. 700 ss.

difetto fondamentale della teoria leibniziana, quello appunto di ritenere i differenziali come altrettanti simboli di grandezze infinitesime.

Hegel ovviamente non conosceva la *Responsio* che Leibniz stesso, come abbiamo visto, aveva dato sugli *Acta Eruditorum* circa un anno dopo la pubblicazione delle *Considerationes*, quindi continuò a considerare la metafisica leibniziana in modo affatto negativo [11].

Il fatto veramente curioso è che Hegel, pur avversando nettamente la metafisica matematica di Leibniz, finisce per utilizzarla abbondantemente attraverso il recupero di questa, effettuato da Euler, Boscovich, Kaestner e Lambert.

Infatti il problema di rendere ragione della possibilità di una doppia asserzione nell'ambito della scienza, a seconda del riferimento alla relazione od all'estensione, era quello stesso che Leibniz si era posto sia nella *Responsio* a Nieuwentijt, sia in *Cum prodiisset atque increbuisset* e negli *Initia rerum mathematicarum methaphysica.*

Questi stessi temi Hegel li ritrova presso Kaestner, quindi presso Euler e Lambert, senza rendersi conto della loro matrice leibniziana.

Malgrado l'infortunio storico, Hegel, su questa base, si costruisce una sorta di principio esplicativo che dovrebbe caratterizzare logicamente il passaggio dall'estensione alla relazione.

Detto Principio possiamo enunciarlo in questo modo. L'evidenza del rigore è direttamente proporzionale alla perdita di contenuto. Meno immediatamente evidente è il rigore, maggiore è il contenuto della teoria.

Dato che il calcolo differenziale si pone l'obiettivo di recuperare la totalità del contenuto presente negli standard intuitivi dei Greci, è costretto a rinunciare all'evidenza immediata su cui poteva contare il

[11] L'edizione dei *Principia*, considerata da Hegel, era l'edizione di Amsterdam della seconda versione dei *Principia*. Cfr. *Philosophiae naturalis principia mathematica. Auctore Isaaco Newtono, equite aurato. Editio ultima auctior et emendatior*, Amsterdam 1714. Gli altri testi sono rispettivamente: Marquis de l'Hospital, *Analyse des infiniment petits, pour la intelligence des lignes courbes*, Paris 1696; B. Nieuwentiit, *Considerationes circa Analyseos ad quantitates infinité parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis*, Amstelaedami 1694. La risposta a Nieuwentiit, data da Leibniz sugli *Acta Eruditorum* (che Hegel ovviamente non conosceva) era: *Responsio ad nonnullas difficultates a Dn. Bernardo Nieuwentiit circa methodum differentialem seu infinitesimalem notas*, in *Acta Eruditorum*, Lipsiae 1695.

rigore algebrico. Deve, per così dire, costruire un rigore più sofisticato ed affidarsi a *definizioni implicite*.

Hegel già nel periodo di Jena padroneggia perfettamente un simile criterio di giudizio, e lo ribadirà con decisione durante la prima stesura della Logica.

Dato che il principio dell'*analisi dell'infinito* — sostiene con forza Hegel — è di piú alta natura, rispetto alla matematica classica, occorre che *rinunci* a quel *rigore immediatamente evidente* che caratterizza le teorie precedenti. Il che sta a significare — come abbiamo già detto — che una situazione di *maggior rigore* implica una situazione di *minor contenuto* e viceversa [12].

In questo senso la procedura di soppressione avrebbe come corrispettivo quello di aumentare i contenuti a prezzo, però, di spezzare il piano complessivo della disciplina scientifica in differenti punti di vista tra loro incongruenti [13].

[12] Cfr. in *Die Objektive Logik* (1812-13), herausgegeben von F. Hogemann und W. Jaeschke, in *Gesammelte Werke*, Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Bd. XI, Düsseldorf 1978.

Il passo di Hegel cui ci siamo riferiti è il seguente: *Allein da das Prinzip der Analysis des Unendlichen höherer Natur, als das Prinzip der Mathematik endlicher Grössen ist, so muß jene auf das geringere Verdienst der Evidenz, das diese vornemlich der Begrifflosigkeit ihres Inhalts und ihrer Methode verdankt, nothwendig Verzicht thun, wie die Philosophie auch auf diejenige Deutlichkeit keinen Anspruch machen kann, die die Wissenschaftten des Sinnlichen, z. B. Naturgeschichte hat, und wie Essen und Trinken für ein verständlicheres Geschäfte gilt, als Denken und Begreifen*. Ivi, p. 171.

[13] Come si può facilmente notare Hegel, in questo periodo, non fa altro che riprendere e sviluppare i risultati delle *Geometrische Studien*. Cfr. *Jenaer Systementwürfe II*, herausgegeben von Rolf-Peter Horstmann und Johann Heinzich Trede, in *Gesammelte Werke*, Bd. VII, Bon - Bad Godesberg 1971, p. 18 ss. D'altronde Hegel mantiene, pressoché inalterato, questo schema interpretativo nella *Fenomenologia* in cui svolge in piú delle considerazioni circa la *matematica applicata*, ispirata sempre a Kaestner, cfr. A. G. Kaestner, *Anfangründe der angewandten Mathematik. Der mathematischen Anfangsgründe*, Göttingen 1765. Circa la *Fenomenologia* cfr. *Phänomenologie des Geistes*, herausgegeben von W. Bonsiepen und R. Heede, in *Gesammelte Werke*, Bd. IX, Düsseldorf 1980, « Vorrede », p. 9 ss., circa le parti inerenti la matematica cfr. p. 32 ss. Mettendo a confronto le riflessioni hegeliane svolte durante il periodo di Francoforte, e riprese a Jena, con quelle della « Prefazione » alla *Fenomenologia* (a questo proposito cfr. *Dokumente*, cit., pp. 288-300) risulta evidente come Hegel avesse maturato durante il periodo di Francoforte le linee portanti delle sue considerazioni critiche nei confronti del metodo euclideo.

Occorre notare che Hegel non tratta questi temi nel suo insegnamento a Jena. Questo fatto risulta dimostrato ove si tengano in considerazione i testi base usati

1.3. *Gli anni della prima stesura della Logica.*

Abbiamo già avuto modo di vedere che due erano i modi mediante cui, nella seconda metà del settecento, venivano articolati i principi di corrispondenza. Nel primo caso il punto di riferimento era rappresentato dal manoscritto leibniziano *Cum prodiisset atque increbuisset*, nel secondo caso dagli *Initia rerum mathematicarum metaphysica.*

Nel primo caso la corrispondenza, tra due asserzioni incongruenti viene stabilita definendo gli ambiti in ragione dei quali le due asserzioni possono essere considerate relativamente congruenti. Su questa falsariga risultano collocabili rispettivamente la teoria dell'*identità* o della *proporzionalità* di Euler (*Institutiones*, 1755) e la teoria delle *equazioni imperfette* di Carnot (*Réflexions*, 1797).

Nel secondo caso la corrispondenza viene stabilita mostrando come tutto l'ambito della matematica, incluso quello classico legato all'estensione, risulti interpretabile dal punto di vista della relazione. Quindi l'estensione dovrebbe risultare un caso particolare di relazione; piú precisamente dovrebbe corrispondere al campo delle relazioni meno sofisticate. Lungo questa direzione risulta collocabile la logica relazionale di Lambert (*Disquisitio*, 1768) e la teoria della grandezza relazionale di Kaestner; ricostruibile quest'ultima facendo riferimento rispettivamente agli *Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen* (1760), *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* (1761) ed allo scritto *Über den Gebrauch des mathematischen Geistes* in cui appaiono piú evidenti i rapporti del matematico di Göttingen con Lambert [14].

da Hegel per l'insegnamento: C. D. M. Stahl, *Reine Mathematik, Arithmetik und Geometrie.* Era utilizzata la Prima Parte: *Anfangsgründe der Arithmetik zum Gebrauche bey Vorlesungen*, Jena - Leipzig 1802; J. F. Lorenz, *Grundrisse der reinen und angewandten Mathematik oder der erste Cursus der gesamten Mathematik*, Helmsted 1798.

Tra l'altro Lorenz è l'autore della prima traduzione tedesca degli *Elementi* di Euclide, traduzione che Hegel ha utilizzato sin dal periodo di Francoforte: *Euklid's Elemente. Fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von Johann Friedrich Lorenz. Zweite durchaus verbesserte Ausgabe*, Halle 1798.

Come si può notare la traduzione adoperata da Hegel consisteva ancora di quindici libri prima che la critica di Heiberg ne eliminasse due considerandoli non di Euclide. In generale sulla docenza di Hegel a Jena cfr. H. Kimmerle, *Dokumente zu Hegels jenaer Dozententätigkeit (1801-1807)*, in « Hegel Studien », vol. IV (1967), pp. 55, 69, 83.

[14] Cfr. soprattutto A. G. Kaestner, *Über den Gebrauch des mathematischen Geistes*, in *Vermischte Schriften*, Altenburg 1783, p. 377. Qui l'intiero ambito

Hegel, all'epoca delle *Geometrisce Studien* ed a Jena, si ispira fondamentalmente al primo modo di porre il problema della *corrispondenza*, quindi accentua il fatto che il punto di vista estensionale e quello relazionale rappresentano una contrapposizione che spezza il campo della matematica in due ambiti distinti: quello della matematica classica e quello della *höhere Mathematik*. Quindi, in questo periodo, ha come punto di riferimento sia la *teoria dell'identità* di Euler, sia la teoria della *doppia prospettiva della grandezza* sostenuta, in un primo momento, da Kaestner, negli *Anfangsgründe der Mathematik*, e sostanzialmente identica a quella di Euler.

Durante gli anni della breve permanenza a Bamberga (1807) ed a Norimberga (1808-1816), Hegel focalizza l'attenzione sulle opere di Kaestner che pongono il problema della corrispondenza conservando il punto di vista estensionale nella nuova prospettiva relazionale. In questa fase Hegel ritiene che il paradosso della soppressione, tipico dell'epistemologia matematica della seconda metà del settecento, debba essere interpretato logicamente come una *soppressione-conservazione*: il punto di vista estensionale verrebbe soppresso e conservato ad un tempo, anche se, in quest'ultimo caso verrebbe conservato in una luce nuova, quella rappresentata dall'ambito della relazione.

Da questo punto di vista (quello della relazione), sempre secondo Hegel, emergerebbero nuove caratteristiche dell'estensione stessa, precedentemente occultate dal paradigma di riferimento rappresentato dalla proprietà di esaustione. Anche la matematica classica esibirebbe gli stessi salti concettuali e le stesse procedure di soppressione evidenziate, nella *höhere Mathematik*, dal processo di *raddoppiamento della secante* in relazione al rapporto differenziale. Si avrebbero, quindi, nella stessa prospettiva estensionale, dei processi che, in qualche modo, prefigurerebbero nuovi ambiti relazionali completamente eterogenei, dal punto di vista della logica estensionale, rispetto ai precedenti.

Quello che spinge Hegel a questo tipo di riflessioni fu la sua lettura delle *Institutiones calculi differentialis* soprattutto in quelle parti in cui Euler, portando avanti un programma già iniziato nella *Introductio in analysin infinitorum*, stabilisce dei nessi fra le serie e la teoria dei numeri.

della matematica viene interpretato come un calcolo relazionale; a certi livelli del nuovo calcolo c o r r i s p o n d e r e b b e la vecchia prospettiva dell'estensione. Risulta evidente la perfetta sincronia con il Lambert della *Disquisitio*.

Hegel viene colpito soprattutto dal modo di trattare le frazioni mediante *serie infinite*. Ad esempio Euler stabilisce che la frazione $1/1-x$ può essere rappresentata dalla serie $1+x+x^2+x^3\ldots$ (tra l'altro Hegel prende da questi passi euleriani le dizioni *serie sommabile* e *serie non sommabile*) quindi deduce che la frazione può essere ritenuta l'espressione simbolica di una serie [15].

Da questo punto di vista, ad esempio, il passaggio dai numeri naturali ai razionali implicherebbe la prefigurazione di un ambito relazionale nuovo che non può essere affatto padroneggiato dalla logica precedente (quella aritmetica). Si verificherebbe lo stesso processo di soppressione che avevamo visto già verificato a proposito degli assiomi ed a proposito del rapporto differenziale [16].

In sostanza Hegel, utilizzando la teoria della *corrispondenza* di Kaestner, quindi anche di Lambert, stabilisce che la soppressione non equivale soltanto al fatto di stabilire una prospettiva alternativa, ma significa altresí conservare e gettare una nuova luce su ciò che è stato soppresso. La netta linea di demarcazione che Hegel aveva tracciato, a partire dalle *Geometrische Studien*, tra matematica classica ed *höhere Mathematik* tende a sfumarsi: anche nella matematica classica risulterebbe operativa una prospettiva relazionale che prefigura nuovi ambiti, cosí come gli assiomi prefigurano nuove teorie e cosí come i rapporti differenziali prefigurano la nuova matematica dell'infinito.

Da questo punto di vista esisterebbe un metodo scientifico, basato sulla possibilità di doppie asserzioni e su soppressio-

15 Hegel legge le *Institutiones calculi differentialis* nella traduzione tedesca: *Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differential-Rechnung. Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzten begleitet von Johann Andreas Christian Michelsen*, Erster Theil, Berlin und Libau 1790. I passi cui fa riferimento Hegel sono, nella traduzione tedesca, a p. 99 ss.

Circa le *serie infinite* e la *teoria dei numeri* presso Euler cfr. Paul Stäckel, *Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen*, « Bibliotheca Mathematica » VIII (1907-1908), pp. 37-60; Gerhard Kowalewski, *Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen*, Berlin 1910. Tra l'altro Kowalewski curò egli stesso una edizione delle *Institutiones calculi differentialis*, Berlin 1913, che può essere considerata come una edizione canonica data la competenza del Kowalewski circa la storiografia su Euler.

16 Cfr. *Die Objektive Logik*, in *Gesammelte Werke*, cit., Bd. XI, pp. 158 ss., l'analogia con il *rapporto differenziale* è a p. 164 s.

n i , indipendentemente dalle teorie matematiche cui si fa riferimento. È come affermare che il *paradosso dell'indistinguibilità*, affermato da Nieuwentijt, non è affatto un caso anomalo, tipico della *höhere Mathematik*, ma rappresenta una caratteristica tipica del metodo scientifico in generale.

Capitolo II

IL METODO MATEMATICO

2.1. *Procedura di Analisi e Procedura di Sintesi.*

Hegel nel 1816 organizza i risultati cui era pervenuto nel 1812 e ci fornisce uno spaccato del metodo scientifico in generale [1].

Il paradosso dell'indistinguibilità, relativo alle procedure di analisi e a quelle di sintesi, ed il fatto che il punto di vista relazionale risulta estensibile anche alla matematica classica, permette ad Hegel di considerare la geometria sintetica di Euclide rappresentativa della moderna analisi e, più in generale, rappresentativa delle scienze relazionali [2].

L'indistinguibilità logica tra analisi e sintesi era un risultato che la *Disquisitio* di Lambert aveva messo in evidenza relativamente alla nuova logica relazionale. Kaestner nelle *Vorerinnerungen* agli *Anfangsgründe der Arithmetik* aveva sostenuto un punto di vista analogo, ritenendo che, al piú, la distinzione poteva essere sostenuta solo da un punto di vista pratico.

[1] Cfr. *Die subjective Logik*, hrsg. von F. Hogemann und W. Jaeschke, in *Gesammelte Werke*, cit., Band 12, Düsseldorf 1981.

[2] Hegel distingue tra la condizione di *analiticità* e la *procedura di analisi*; quest'ultima, infatti, sarebbe *sintetica* a tutti gli effetti. Relativamente al piano dell'*Idea* in quanto *conoscenza sintetica* vi rientrerebbe tanto la *procedura di sintesi*, tipica della *geometria euclidea* quanto la *procedura di analisi*, tipica ad esempio del processo di *raddoppiamento della secante*. Entrambe, infatti, implicherebbero un processo di *generalizzazione*. Tratterebbesi di una *deduzione* che implica un *ricorso ad altro*.

In questo senso la contrapposizione classica tra le due metodologie, resa acuta dopo il 1742 con la comparsa del *Treatise of Fluxions* di MacLaurin, si sfuma alquanto. Il punto di vista relazionale dell'*analysis situs*, affermatosi dopo il dibattito sulle corde vibranti, mette in evidenza l'impossibilità di tracciare dei confini metodologici sicuri tra le due procedure. Anche l'analisi presenterebbe gli stessi salti concettuali, dati dagli assiomi nel metodo sintetico, e presenterebbe le stesse generalizzazioni.

Nella prima parte del nostro lavoro abbiamo mostrato come tutto il dibattito epistemologico sugli elementi semplici, sviluppatosi nella seconda metà del settecento, fosse orientato a giustificare un fatto, all'epoca, estremamente traumatico: l'analisi che porta ad isolare gli elementi costitutivamente semplici, quali ad esempio le posizioni spaziali, è costretta ad operare delle *soppressioni - generalizzazioni* che, in qualche misura spezzano il meccanismo della deduzione.

Euler, nelle *Réflexions*, aveva messo in evidenza, per la prima volta, il problema; ed aveva sostenuto che la procedura di analisi, come nel caso leibniziano tipico della sezione, implica gli stessi enigmi presenti nella logica di formulazione degli assiomi: trattasi appunto della procedura di soppressione del concreto. Lo stesso Euler, sette anni dopo, aveva ripreso il problema nelle *Institutiones* (1755) ribadendo sostanzialmente che l'analisi sottostà al paradosso dell'indistinguibilità, già formulato da Nieuwentijt.

Abbiamo già detto che, circa una decina d'anni dopo la pubblicazione delle *Institutiones*, il problema era diventato centrale soprattutto ad opera di Kaestner e Lambert.

A tutt'oggi non si possono avere prove certe della lettura, da parte di Hegel, della *Disquisitio* di Lambert, tuttavia un dato certo lo possediamo. Hegel conosceva il problema euleriano, circa gli enigmi della divisibilità infinita, attraverso la lettura delle *Institutiones* e soprattutto attraverso la lettura di Kaestner che, stante i suoi rapporti di affinità con Lambert, aveva sostenuto, come già abbiamo avuto modo di vedere, tesi analoghe sul problema.

Hegel, sull'esempio di Kaestner, ritiene che la distinzione tra una tautologia (analiticità) ed un ragionamento sintetico sia effettuabile solo da un punto di vista pratico. Infatti, in linea di principio, badando alla totalità del problema, le due prospettive risulterebbero logicamente indistinguibili. Il che significa che, da un puro punto di vista epistemologico, risulterebbero collocate nell'ambito del paradosso dell'indistinguibilità formulato da Nieuwentijt.

Nel primo caso (quello analitico) la deduzione deve risultare puramente meccanica: trattasi di una scomposizione (formulabile intieramente all'interno del campo concettuale presupposto) che permette di isolare quelle proprietà che sono ottenibili in ragione delle prescrizioni logiche implicite nel dato iniziale.

Un esempio di questa procedura (caro ad Hegel per la sua polemica antikantiana) è l'inferenza $7 + 5 = 12$. Posto il dato iniziale $7 + 5$ è possibile ottenere la sua proprietà di essere 12 esclusivamente col seguire le prescrizioni logiche dell'aritmetica: reiterando l'unità, in ragione del numero delle volte prescritte, si ottiene senza difficoltà il risultato. L'operazione logica è formulata esclusivamente all'interno delle concettualità dell'aritmetica, rappresentate dalla premessa $7 + 5$, senza alcun ricorso ad altri concetti.

Anche l'asserzione *la retta è la distanza piú breve fra due punti* rientra pienamente in questo schema analitico.

Infatti il predicato *piú breve* è connesso logicamente con il termine *linea retta*: trattasi di una prescrizione logica dell'*essere retto*. Il ragionamento non fa altro che isolare deduttivamente questa proprietà.

Sia le inferenze sillogistiche (che oggi si definirebbero vere in virtú della loro forma logica), sia le inferenze basate intieramente sul significato (ad esempio il significato di linea retta in quanto implica di essere la più breve) rientrano senza distinzione in questo schema analitico.

Insomma, nel ragionamento analitico, la deduzione è completamente interna alle caratteristiche logiche del concetto iniziale.

Nel secondo caso (quello sintetico) la deduzione non può articolarsi esclusivamente in ragione dell'ambito concettuale iniziale, ma deve ricorrere a concettualità ausiliarie: occorre — come afferma testualmente Hegel — *un ricorso ad altro*; il risultato è che l'operazione deduttiva implica concettualità eterogenee che vengono saldate assieme mediante procedure di riduzione.

Tuttavia, secondo Hegel, questo tipo di distinzione è esclusivamente pratica. Il che presuppone che sia tracciabile se vengono pragmaticamente escluse delle attività preliminari. In sostanza la distinzione può sussistere solo in ragione di quello che è stato pragmaticamente presupposto.

Hegel stesso ci fornisce un esempio perspicuo: il teorema di Pitagora può essere considerato un enunciato che deve essere dimostrato. Come tale occorre esibirlo in quanto risultato (cioè come teorema effettivo) della formalizzazione euclidea (resta da sé che occorrono scelte ausiliarie qundi una articolazione dimostrativa di tipo sintetico); però, nello stesso tempo, il medesimo teorema di Pitagora può essere considerato una definizione di una determinata specie di triangoli (si tratta di definire una classe di triangoli mediante la relazione $a^2 = b^2 + c^2$), in questo secondo caso lo si può scomporre logicamente per isolare tutte le condizioni che contiene, quindi si ottengono analiticamente tutti quei teoremi che, nel caso della dimostrazione sintetica euclidea, fungevano da concettualità ausiliarie già dimostrate.

Questo duplice modo di considerare una stessa cosa — ci dice Hegel — dipende dallo sfondo concettuale che si presuppone: nel primo caso si trattava della prospettiva concettuale di un possibile geometra euclideo che si sforza di trasformare un dato enunciato in un teorema effettivo della sua teoria, nel secondo caso si considera già consolidata l'articolazione completa della teoria euclidea (con tutti i suoi teoremi) e si procede ad esplicitare analiticamente le definizioni.

Questo tipo di teorizzazione contiene un'idea di fondo estremamente rilevante: la deduzione analitica si articola esclusivamente se viene fissato preventivamente un ambito teorico (una sorta di conoscenza di sfondo), ciò non toglie che dette concettualità presupposte siano, esse stesse, un prodotto sintetico.

Vediamo di chiarire servendoci dei soliti esempi hegeliani. Quando si afferma che la proposizione aritmetica $5 + 7 = 12$ è analitica, è come se si articolasse un ragionamento di questo tipo: date per presupposte le concettualità dell'aritmetica e constatata la peculiare prescrizione logico-aritmetica contenuta nella premessa $5 + 7$, non si fa altro che eseguire meccanicamente quanto era già prescritto e si ottiene il risultato 12. In questo senso il risultato non aggiunge alcunché di concettualmente nuovo a quello che si era dato per presupposto nella premessa $5 + 7$ (si opera sempre all'interno della logica aritmetica).

Questo non toglie che l'ambito concettuale dell'aritmetica sia stato, in precedenza, prodotto sinteticamente: un qualsiasi tipo di calcolo meccanico si regge sulle concettualità sintetiche che lo hanno prefigurato in anticipo; ciò avviene per l'aritmetica, per l'algebra e per la stessa analisi. Insomma un qualsiasi ambito meccanico (analitico) risulta sempre limitato qualitativamente, ha dei confini concettuali precisi oltre i quali non può spingersi. La stessa cosa avviene per l'enunciato geometrico *la retta è la linea piú breve fra due punti*; anche in questo caso la relativa affermazione circa la sua analiticità equivale ad un ragionamento di questo tipo: dato per presupposto l'ambito concettuale delle entità geometriche idealizzate (astratte), allora non si può fare a meno di ammettere che la proprietà della retta di essere la linea piú breve fra due punti fa parte logicamente della stessa condizione di essere la retta una entità ideale astratta.

Ciò non toglie che l'ambito ideale astratto della geometria, che nel nostro caso costituiva lo sfondo concettuale dato, a sua volta sia stato prodotto sinteticamente mediante una procedura che Hegel, sull'esempio dell'epistemologia della seconda metà del settecento, designa come soppressione del concreto[3].

Da quanto siamo venuti dicendo resta evidente l'impossibilità di tracciare una definitiva linea di demarcazione fra i due tipi di conoscenza, in modo tale da poter mettere, una volta per tutte, da un lato tutti i giudizi analitici e dall'altro tutti i giudizi sintetici. Questo succede poiché un qualsiasi tipo di delimitazione ha sempre un valore relativo, si regge — come afferma Hegel — su di un presupposto estrinseco. Ciò non significa che sia impossibile distinguere le due prospettive, significa soltanto che la distinzione è esclusivamente un separare differenti funzioni (quella analitica e quella sintetica) all'interno di un ben preciso ambito teorico, senza nulla togliere al fatto che uno stesso enunciato, in un ambito teorico differente, possa esplicare una funzione diversa.

In questo modo Hegel, sull'esempio di quanto avevano già fatto Euler, Kaestner e Lambert, non fa altro che rendere virtuoso il paradosso dell'indistinguibilità di Nieuwentijt.

[3] Come si può facilmente notare quando Hegel, in *Die subjective Logik,* vuole distinguere tra le parti che egli stesso designa rispettivamente come *conoscere analitico* e *conoscere sintetico,* riprende abbondantemente i temi svolti nelle *Geometrische Studien, Dokumente,* cit., pp. 288-300; nella *Logica* di Jena, *Gesammelte Werke,* cit., Bd. VII; e nella « Vorrede » alla *Phänomenologie des Geistes, Gesammelte Werke,* cit., Bd. IX; inoltre riprende i temi che aveva già trattato in *Die Objektive Logik, Gesammelte Werke,* cit., Bd. XI, a proposito della soppressione del concreto.

2.2. *Il problema degli assiomi.*

Abbiamo già visto che il problema degli assiomi rende cruciale il paradosso della soppressione di Nieuwentijt. E questo risulta pertinente sia ai *postulati* della geometria euclidea sia all'individuazione del rapporto differenziale; il quale ultimo implica la rottura del meccanismo deduttivo ed il ricorso ad un punto di vista esterno che, per così dire, annienta le differenze.

La riflessione epistemologica della seconda metà del settecento era orientata a giustificare l'enigma in ragione del quale il processo di annientamento della realtà finiva per portare alla luce una realtà relazionale per certi versi piú concreta della precedente.

Da questo punto di vista gli assiomi assumevano la connotazione di incondizionati virtuosi. Il punto di vista era emerso chiaramente nel dibattito relativo al postulato delle parallele, i lavori di Kaestner, Klügel e Lambert erano orientati in questo senso, e nel dibattito relativo agli elementi semplici dell'*analysis situs* [4].

Come si può vedere Hegel, nel 1816, si riferisce allo stesso quadro culturale di cui si era già servito nella stesura delle *Geometrische Studien*. Tuttavia ora fa valere un punto di vista teso a sottolineare il fatto che la caratteristica degli assiomi è quella di essere formulati in assenza di una qualsiasi garanzia logica. Con questo tipo di approccio Hegel pensa di affrontare alla radice il quesito kaestneriano circa la contemporaneità di due requisiti, per certi versi, antitetici: la soppressione del concreto e la stringenza empirica.

Hegel sostiene con forza che, nella fase iniziale della formulazione, non vi è alcun criterio per stabilire la legittimità o meno delle scelte che si sono effettuate; si sceglie solo in ragione di personali convinzioni.

Con questo Hegel vuole dire che, in origine, si può contare solo

[4] In occasione del problema relativo al *quinto postulato*, Kaestner aveva sottolineato la natura di *incondizionati* degli *assiomi* in *Geometriae Euclidis primam quae post inventam typographiam prodiit editionem breviter describit*, cit.; Klügel, allievo di Kaestner, fa valere il medesimo punto di vista in *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio*, cit.; lo stesso Lambert in *Die Theorie der Parallelinien*, cit., sostiene un punto di vista analogo. Inoltre Kaestner, durante gli anni della sua collaborazione al « Philosophisches Magazin », cfr. soprattutto *Über die geometrische Axiome*, cit., sull'esempio dell'Euler delle *Institutiones*, aveva sottolineato il fatto che, malgrado la natura di *incondizionati*, gli *assiomi* dovevano costituire un portato dell'esperienza.

su di un vago presentimento che la cosa andrà a buon fine. Solo a posteriori, quando la teoria si sarà effettivamente dispiegata, si potrà assegnare agli assiomi un campo concreto di contenuti, quindi si potrà realmente misurare la loro efficacia. All'inizio si ha solo un tirare ad indovinare.

Quindi i due lati del dilemma di Kaestner, la soppressione del concreto e la stringenza empirica, costituirebbero una sorta di dramma della conoscenza: un massimo di precarietà e arbitrarietà può tradursi in un massimo di adeguatezza. Il fatto è che, a priori, si opera sempre senza garanzie. Solo quando si è rischiato è possibile stabilire che si è trattato di un rischio ben riposto.

Il paradosso della soppressione non farebbe altro che rappresentare questa sorta di enigma e costituirebbe un fondamento irrinunciabile della prassi conoscitiva.

Tale modo, completamente astratto, di intendere gli assiomi, Hegel lo applica ai problemi relativi al *quinto postulato*.

Come abbiamo già avuto modo di vedere, alla base delle riflessioni teoriche sul *postulato delle parallele*, vi era l'impossibilità di una sua legittimazione costruttiva a partire dalle ventitré definizioni iniziali (la cosa era invece possibile per gli altri quattro postulati), quindi si pensò dovesse essere eliminato dall'insieme degli assiomi ed eventualmente dovesse essere ottenuto come teorema.

Per Hegel la richiesta di una immediata dimostrabilità costruttiva, circa gli assiomi, contiene un grave vizio di fondo, dovuto ad una scarsa coscienza filosofica della funzione degli assiomi stessi.

Infatti il mondo ideale della geometria si costruisce proprio asserendo che vale la relazione secondo cui dati comunque due punti si può condurre la linea retta che li congiunge (primo postulato), oppure che *da un punto esterno ad una retta si può tracciare una, ed una sola, retta parallela alla retta data* (postulato sulle parallele). È in virtú di queste relazioni — sostiene Hegel — che si può costruire un mondo ideale in cui valgono precise regole dimostrative e non altre, quindi non ha alcun senso richiedere preventivamente la loro dimostrabilità costruttiva; questo perché sono esse le c o n d i z i o n i su cui si reggono le stesse p r o c e d u r e d i m o s t r a t i v e.

Per tali motivi Hegel ritiene che Euclide avrebbe dovuto giustificare filosoficamente il quinto postulato in relazione alla sua funzione metodologica: la fase degli assiomi corrisponde, nella logica filosofica, al momento della negazione (soppressione della realtà empirica), ma la negazione è immediatamente un *porre* e, in questo caso, *un porre ciò che si vuole porre.* Questo significa che con il termine *retta* si vuol intendere la condizione secondo cui da un punto esterno ad essa si può tracciare una, ed una sola, retta parallela, e non altre cose; quindi il mondo ideale della geometria euclidea è un mondo costruito a partire dall'unicità della parallela; se si fossero posti assunti diversi si sarebbe costruito un mondo diverso.

Il modo completamente astratto di concepire definizioni e postulati, nella prospettiva hegeliana, apre la via ad una concezione, parimenti astratta, della geometria. Gli *enti geometrici* non sono piú quelli corrispondenti all'intuizione immediata, ma semplici entità costruite secondo i criteri formali che si vuol ammettere.

Hegel ritiene che, anche questa fase, rispecchi un andamento sintetico del pensiero; quest'ultimo sarebbe rappresentato dal momento della *negazione del concreto* e dalla produzione di un campo di relazioni, completamente astratte. Solo a questo prezzo, e con questa provvisorietà iniziale, si ottengono le nozioni della scienza [5].

[5] Nella *Logica* del 1816, *Die subjective Logik*, cit., Hegel svolge queste considerazioni relativamente alla fase che egli stesso denota come *definizioni* (termine equivalente a quello che noi oggi intendiamo per *assiomi*). La *definizione* costituirebbe il *primo momento logico* dello svolgimento dell'*Idea* in quanto *conoscenza scientifica* (momento relativo agli *assiomi*). Questa fase del processo conoscitivo non farebbe altro che codificare, come un fatto logico fondamentale, il *paradosso della soppressione*; quindi non farebbe altro che rendere ragione del fatto secondo cui una teoria, completamente assiomatizzata, quindi astratta, finirebbe per avere una portata concreta di gran lunga piú concreta del concreto immediato. Hegel utilizza, a questo proposito, la traduzione tedesca degli *Elementi* di Euclide fatta da J. F. Lorenz, *Euklid's Elemente. Fünfzen Bucher, aus dem Griechischen übersetzt von Johann Friedrich Lorenz*, cit.

Oltre ai già citati lavori aperti da Kaestner, Hegel fa evidenti riferimenti alle *Réflexions* di Carnot, soprattutto relativamente alle parti che trattano dei concetti incondizionati in matematica, trattasi di un raffronto epistemologico tra i *numeri immaginari* ed i *differenziali.* Hegel si serve della traduzione tedesca e delle relative *notazioni* di Hauff, *Carnot: Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung. Aus dem Französischen ünersetz und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet von J. K. Fr. Hauff*, Frankfurt a. M. 1800.

Sono altrettanto evidenti i riferimenti alle *Institutiones* di Euler utilizzate nella traduzione tedesca di Michelsen, *Leonhard Euler's Volständinge Anleitung zur Differential-Rechnung. Aus dem Lateinische übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet von Johann Andreas Christian Michelsen*, Berlin und Libau 1790. Soprattutto relativamente alle parti che trattano il problema della *divisibilità infinita* in quanto enigma tra l'astratto ed il concreto.

2.3. *La Generalizzazione deduttiva: le definizioni reali.*

Uno dei risultati fondamentali della Disquisitio di Lambert consisteva nel mettere in evidenza come anche la *deduzione* (procedura di analisi) riuscisse a produrre una generalizzazione non prevedibile sulla base dell'enunciato, o del complesso di enunciati, da dimostrare.

Ripetiamo di non avere le prove certe della lettura, da parte di Hegel, della *Disquisitio*, tuttavia la serie degli *Anfangsgründe* di Kaestner (che Hegel conosceva) esprimevano una convinzione analoga.

D'altronde il problema, come abbiamo già visto, era stato aperto dallo stesso Euler nelle *Institutiones* del 1755, ed Hegel lo ritrova inalterato nelle *Dissertazioni* concorrenti al *Preisaufgabe* del 1784, anche se, per la verità, con un segno un po' diverso [6].

Il problema di Hegel è quello di interpretare lo stesso enigma cosí ben sintetizzato dalla *Disquisitio*. Se il metodo scientifico è rappresentato mediante una sorta di procedura di andata e ritorno in cui l'andata è rappresentata dalla generalizzazione a partire dagli assiomi ed il ritorno dalla scomposizione analitica di quello che si è ottenuto, allora ci si accorge di un imprevedibile paradosso: la procedura di ritorno non ottiene semplicemente quello che si aveva in origine ma esibisce nuovi contenuti completamente inattesi.

L'enigma era ancora piú sconvolgente se si pensa che uno dei risultati del dibattito sulle corde vibranti era rappresentato dal fatto che la formalizzazione (cioè la serie di Taylor) riusciva ad ottenere rigore solo a prezzo di una drastica perdita di contenuto. Hegel, sin dal tempo delle *Geometrische Studien*, aveva evidenziato questo fatto ritenendolo la causa della possibilità di *doppie asserzioni*, tra loro incompatibili, all'interno della scienza [6].

Ora il problema è quello di rendere ragione di un fatto apparente-

[6] Sono frequentissimi i riferimenti che Hegel fa alla *dissertazione* di L' Huilier, *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris ad normam dissertationis academia scient. reg. Prussica anno 1786. Premi honore decoratae elaborata auctore Simone L' Huilief*, cit. Soprattutto relativamente alla separazione, come abbiamo già avuto modo di vedere, tra il *formale deduttivo* della *serie di Taylor* ed il *concreto* della *teoria dei limiti*. Le altre *dissertazioni*, concorrenti al *Preisaufgabe*, si muovono in ragione di una analoga separazione. Cfr. rispettivamente W. J. G. Karsten, *Anfangsgründe der mathematische Analysis und höhern Geometrie*, cit.; M. N. Landerbek, *Disputatio solutionem quaestionis cujusdam de maximis vel minimis exhibens*, cit.

mente incongruente: la deduzione formale (dimostrazione) non si limita a confermare l'enunciato originario da dimostrare, ma è in grado di produrre autonomamente nuovi contenuti.

Anche se Hegel non riesce a padroneggiare completamente i motivi tecnici di questo paradosso, legato all'affermarsi dell'*analysis situs*, quindi alla nuova logica relazionale, riesce comunque a coglierne molto bene il significato epistemologico [7].

Hegel distingue sostanzialmente due direzioni in ragione delle quali può verificarsi l'aumento del contenuto. La prima può contrassegnare un aumento di contenuto in estensione (tipico ad esempio delle procedure di sintesi), la seconda un aumento di contenuto in profondità (tipico ad esempio delle procedure di analisi).

Ottenere rigore dimostrativo significa perdere contenuto in estensione ma significa anche guadagnare contenuto in profondità.

L'intento di Hegel è ora quello di mostrarci come si articola ed in che cosa consista quest'ultima prospettiva, in ragione della quale la procedura dimostrativa determina originariamente ed autonomamente un aumento di contenuto.

Il primo esempio lo incontriamo a proposito dello stesso meccanismo della traduzione su cui si articola la dimostrazione.

Ad esempio, in relazione alla dimostrazione del teorema di Pitagora, la traduzione consisteva nel ridurre la relazione lineare originaria in una relazione tra superfici. Questo significava stabilire una identità logica tra concetti che, a rigore, dovrebbero risultare inconfrontabili.

In questa situazione l'equiparazione non è una semplice identità meccanica, tipo $3 = 3$, bensí una identità di *diversi* che sono collegati sinteticamente fra loro mediante una *nozione* o un *rapporto*.

Cerchiamo ora di seguire negli esempi concreti di Hegel, come si realizza questa unità ed in che misura si determina l'aumento sintetico del contenuto.

Hegel si riferisce al triangolo rettangolo in cui vi è incommensurabilità fra l'ipotenusa ed il cateto.

In questo caso — ci dice Hegel — la relazione originaria da dimostrare (quella enunciata dal teorema di Pitagora) in realtà non è affatto una relazione, infatti rispettivamente i simboli x ed y dell'equazione $x^2 = y^2 + y^2$ non sono confrontabili fra loro.

[7] È proprio il privilegiare l'istanza epistemologica la ragione per cui Hegel dà un'interpretazione veramente *sui generis* di Lagrange. Nel prossimo capitolo avremo modo di trattare il problema.

Se, ad esempio, assegnamo ad y (uno dei due cateti) il valore unitario 1, otteniamo che x (l'ipotenusa) non è misurabile linearmente ($\sqrt{2}$ è un numero irrazionale), onde per cui — conclude Hegel — i due membri dell'equazione sono dei *diversi*; mentre il secondo membro appartiene all'ambito concettuale della razionalità (misurabilità), al contrario il primo membro sfugge ad ogni criterio di misura, quindi a rigore non dovrebbe neppure rientrare nell'equazione (infatti la funzione di quest'ultima è quella di esprimere relazioni fra misure lineari).

In questa situazione il compito della dimostrazione è quello di costruire una omogeneità fra le due prospettive; quindi quello di confermare la relazione originaria, previa la produzione di nozioni atte a padroneggiare razionalmente un campo altrimenti non padroneggiabile.

Detta produzione viene realizzata mediante la scelta di concettualità ausiliarie atte allo scopo: se l'ipotenusa e il cateto sono inconfrontabili fra loro, non cosí avviene per le superfici dei quadrati costruiti su di loro. Quindi, traducendo le relazioni lineari in relazioni di equivalenza di aree, si ottiene una situazione razionale perfettamente padroneggiabile.

È come se si scegliesse di giudicare la relazione originaria mediante il ricorso ad un punto di vista privilegiato, ed in modo tale che quest'ultimo garantisca un ambito concettuale omogeneo in cui possa essere ricondotta l'equazione $x^2 = y^2 + y^2$.

Quello che ottiene una simile costruzione (appartenente alla dimostrazione) è un campo sintetico nuovo e non prevedibile sulla base dell'enunciato che si doveva dimostrare: quest'ultimo enunciava una relazione che non era una vera relazione (era impossibile il confronto fra i membri della equazione), al contrario la costruzione produce *ex-novo* un ambito concettuale in cui si può effettivamente procedere al confronto.

Come si può vedere le osservazioni di Hegel possono essere considerate in linea con i principi formulati nella *Differenz*, ma da un certo punto in poi la situazione evolve in un senso relativamente autonomo.

Il fatto che determinati rapporti, appartenenti al triangolo rettangolo, siano messi in luce è affidato ad una prospettiva entimematica: solo se si trovano degli oggetti che possono essere considerati *segni sicuri* degli elementi del triangolo, risulta possibile indagare la possibilità di certe relazioni.

È come se una determinata nozione venisse, per cosí dire, scavata al suo interno e ciò mediante il ricorso ad una mediazione: certi oggetti che le competono non potrebbero mai venire alla luce, ma ricorrendo al suo esterno è possibile trovarne i segni.

È ovvio che lo scavare all'interno mediante un ricorso all'esterno rappresenta — secondo Hegel — una procedura sintetica a tutti gli effetti. Infatti la procedura analitica anche se è destinata ad evidenziare i nessi interni di un oggetto, tuttavia lo fa immediatamente e *senza ricorso ad altro*, al contrario, nel nostro caso specifico, la deduzione deve ricorrere a mediazioni, deve essere appunto una deduzione entimematica. E questo — per Hegel — rappresenta il paradigma classico del ragionamento sintetico. Quella che si apre — sempre secondo Hegel — è la prospettiva di un aumento di contenuto in profondità.

Se si bada alla successione dei teoremi dimostrati nella teoria euclidea, si può contare su di una serie di relative *definizioni reali* che possono benissimo riguardare una stessa nozione (ad esempio la nozione specifica di triangolo). In tal caso si ottiene una progressione di concetti specifici in cui la nozione di triangolo viene sempre piú affinata-in-profondità, in modo tale da permettere di giudicare come *triangoli* figure non prevedibili e non determinabili sulla base delle nozioni precedenti.

Hegel ci fornisce una esemplificazione del problema mediante l'analisi comparata delle dimostrazioni rispettivamente delle proporzioni I, 4 ed I, 47 degli *Elementi* (la proposizione I, 47 rappresenta l'enunciato del teorema di Pitagora esaminato poco sopra).

Hegel comincia con l'osservare che, nella teoria euclidea, la prima definizione di triangolo la si incontra nell'ambito delle *definizioni-generali-astratte*, cioè negli assiomi della teoria (*Definizione* 19 degli *Elementi*).

Questa definizione è un assioma, quindi fornisce esclusivamente un ambito generale all'interno del quale deve essere intesa la figura-triangolo. Infatti la definizione ci dice che il triangolo deve essere una figura trilatera, senza individuare alcuna caratteristica specifica che permetta di distinguere e confrontare i triangoli individuali. È la fase in cui — per Hegel — vi è la completa *assenza di contenuto determinato*.

Le definizioni reali, prodotte dalle varie dimostrazioni dei teoremi, sono destinate, appunto, a colmare questa lacuna, infatti forniscono contenuti determinati.

Seguendo il nostro caso specifico vediamo come vengono prodotte dette nozioni individuali di triangolo.

La proposizione I, 4 può essere enunciata in questo modo: due triangoli aventi due lati uguali e l'angolo compreso pure uguale, devono essere senz'altro considerati uguali fra loro.

Euclide dimostra l'enunciato osservando che la condizione di uguaglianza dei due lati e dell'angolo compreso implica una effettiva sovrapponibilità delle due figure.

L'obiettivo della dimostrazione è quello di offrire un vero e proprio criterio di trasposizione meccanica di una figura su di un'altra, in modo tale che la relativa coincidenza significhi l'uguaglianza delle figure stesse. Quando la dimostrazione è stata portata a termine è possibile ottenere, come suo lemma, la definizione reale del triangolo. Quest'ultima ci dice che, fissato un determinato angolo, e fissati due segmenti nelle due semirette che racchiudono l'angolo stesso, otteniamo la possibilità di completare la figura, quindi otteniamo un triangolo specifico.

A questo punto possediamo una concreta nozione del triangolo che permette confronti fra *triangoli-individui* perfettamente determinabili costruttivamente. Infatti si può ottenere, a seconda dell'ampiezza che si decide di conferire all'angolo ed a seconda della lunghezza dei segmenti-lati, un qualsiasi triangolo individualmente determinato.

Ovviamente questo *contenuto-individuo* è esclusivamente prodotto dalla dimostrazione. Infatti l'enunciato-originario-da-dimostrare prevedeva soltanto la condizione per stabilire l'uguaglianza di due triangoli già dati (nel generico ambito di significato delimitato dall'assioma 19), solo la dimostrazione determina la possibilità di costruire effettivamente un qualsiasi *triangolo individuale* una volta che sia fissato un suo angolo e i due lati che lo comprendono.

In questo modo gli assiomi cominciano ad essere corredati da nozioni concrete e, mano a mano che si procede nelle dimostrazioni dei teoremi, le nozioni sono destinate ad approfondirsi sempre di piú.

Vediamo come si realizza l'approfondimento in ragione della dimostrazione della proposizione I, 47 (teorema di Pitagora).

Abbiamo già avuto modo di constatare che la dimostrazione di questo teorema si riduce alla verifica di una equivalenza fra la superficie del quadrato costruito sull'ipotenusa e la somma delle superfici dei quadrati costruiti sui cateti, in modo tale da ottenere la conferma della relazione: $a^2 = b^2 + c^2$. Dove a rappresenta l'ipotenusa, mentre b e c rappresentano rispettivamente i due cateti.

Una volta che la dimostrazione sia stata effettivamente condotta, la relazione individua una nuova nozione di triangolo: trattasi, appunto, di una *definizione reale*.

Per quale motivo Hegel ritenga l'equazione *la perfetta definizione reale del triangolo* è presto detto. Infatti, se fissiamo un triangolo rettangolo isoscele con i cateti rispettivamente di lunghezza unitaria 1, otteniamo un triangolo perfettamente individuato dalla definizione reale I, 47, al contrario la figura non rientra affatto nella definizione reale I, 4. Anzi, a rigore, da quest'ultimo punto di vista la figura non dovrebbe neppure essere considerata un triangolo; infatti, fissati i due cateti e l'angolo compreso (retto), non risulta possibile chiudere il perimetro in quanto l'ipotenusa non è determinabile linearmente ($\sqrt{2}$ è un numero irrazionale). Che si tratti di un effettivo triangolo è possibile accertarlo soltanto nell'ambito della *definizione-tramite-l'equazione*, cioè nell'ambito della *definizione reale* I, 47.

Da quanto siam venuti dicendo risulta chiaro che, presso Hegel, la dimostrazione non consiste in un semplice atto di conferma di ciò che esiste già, bensí produce autonomamente notevoli variazioni circa il contenuto. In una prima fase, dato che impone uno specifico *standard* di rigore, è costretta a restringere drasticamente il campo originario. Quindi agisce su questa porzione limitata e la scava in profondità. Le procedure di traduzione ed i lemmi-prodotti-dalla-dimostrazione rappresentano le fasi metodologiche in ragione delle quali si determina la nuova direzione dell'aumento del contenuto.

Con ciò Hegel fornisce un'interpretazione virtuosa dell'enigma, evidenziato dall'epistemologia della seconda metà del settecento, circa il duplice ruolo svolto dalla procedura dimostrativa: quello della perdita di contenuto e del contemporaneo suo aumento.

Come abbiamo visto il problema era stato evidenziato in ragione del rapporto che la serie di Taylor intratteneva con l'*analysis situs*. Hegel, in questa fase, lo esemplifica in relazione alla dimostrazione euclidea [8].

[8] In *Die subjective Logik*, cit., Hegel tratta questi problemi relativamente al momento logico che egli designa come *teorema*. Nel piano dell'*Idea* in quanto *conoscenza scientifica* la fase del *teorema* segue la fase della *classificazione*. Hegel comunque, sulla base di quanto aveva già fatto Kaestner nelle *Einige Vorlesungen*, cit. (recensite da Hegel stesso), ritiene che la *classificazione* appartenga alle scienze estensionali (quindi classificatorie) e sia estranea alla matematica ed alla geometria nella misura in cui queste ultime si prospettano come scienze relazionali.

Capitolo III

GLI ANNI DELLA REVISIONE DELLA LOGICA

3.1. *Considerazioni generali.*

Come abbiamo evidenziato nella nostra disamina delle note hegeliane su Euclide, le *definizioni reali* dovrebbero rappresentare dei veri e propri *lemmi*, prodotti dal formalismo dimostrativo, destinati a scavare in profondità le nozioni; se le procedure di traduzione, in ragione delle quali veniva articolata la dimostrazione, riducevano il contenuto dell'enunciato da dimostrare, da un altro punto di vista le stesse procedure di traduzione e le *definizioni reali* aumentavano in profondità il contenuto delle nozioni esibite dallo stesso enunciato originario.

L'intento che si propone Hegel, durante la sua revisione, è appunto quello di costruire una sorta di *iter* logico relativamente a questo fondamentale rapporto.

Si tratta di conservare le osservazioni già codificate nella prima edizione della *Logica*, relativamente ai principi di corrispondenza, al concetto di sezione ed a quello generale di *Verhältnis*, e risistemarle in relazione al problema dell'approfondimento del contenuto segnato dal formalismo. Da questo punto di vista Hegel progetta un vero e proprio piano complessivo atto a segnare le varie fasi logiche e storiche della scoperta del calcolo differenziale.

La prima fase sarebbe rappresentata dalla metafisica globalistica, caratterizzata da una logica eminentemente intuitiva, in cui operano nozioni formalmente imprecise ma caratterizzate da un ampio spettro d'azione.

La seconda fase sarebbe rappresentata dal momento della formalizzazione rigorosa che ha come suo punto d'arrivo la *Théorie des fonc-*

tions analytiques di Lagrange. È la fase in cui i concetti si giustificano solo all'interno di una data struttura formale senza alcun riferimento alle caratteristiche intuitive del movimento.

La terza fase sarebbe caratterizzata dai riflessi in profondità che la formalizzazione esercita sulla metafisica. Qui la primitiva visione ingenua, basata sugli infinitesimi e sull'arbitrarietà delle *definizioni ad hoc*, si affina in una prospettiva in cui anche i concetti logico-intuitivi assumono le caratteristiche di funzioni concettuali, il cui valore è quello di organizzare globalisticamente il campo di indagine mediante una vera e propria logica relazionale.

La partizione hegeliana non fa altro che sintetizzare gli eventi storici in ragione dei quali, nella seconda metà del settecento, si è affermato il nuovo approccio relazionale.

Su questa base l'attenzione di Hegel piú che su temi specifici, come era avvenuto a Jena e negli anni della prima stesura, si dirige all'arco storico complessivo dello sviluppo del calcolo differenziale: si tratta di caratterizzare delle fasi storiche utilizzando il materiale già usato precedentemente.

In tal senso Hegel ordina le sue conoscenze di prima mano sulla matematica (frutto di studi condotti direttamente sui testi) e le immerge in un contesto che egli stesso ricostruisce servendosi di lavori storici non suoi.

Per la verità Hegel si era servito di questi lavori anche negli anni della prima stesura ma lo aveva fatto piú per supportare sue tesi specifiche che per dare una caratterizzazione globale delle differenti fasi storiche.

Possiamo renderci conto facilmente del problema se esaminiamo i riferimenti hegeliani alle procedure di Barrow e Fermat, fatti negli anni della prima stesura, e le rapportiamo ai corrispondenti riferimenti fatti negli anni della revisione. Nel primo caso la citazione è condotta esclusivamente per supportare le tesi che Hegel sostiene in relazione al problema del *tralasciamento*: si tratta di far vedere che le prime considerazioni intuitive si reggevano sulla introduzione degli infinitesimi, quindi che gli scopritori del nuovo calcolo tentavano di ovviare a queste difficoltà costruendo un rigore formale che prevedesse la possibilità di trascurare i differenziali. Nel secondo caso la situazione risulta piú complessa: si tratta di mostrare su quali basi si reggevano le prime strutture metafisiche della *höhere Mathematik* affinché fosse possibile seguirne i vari mutamenti storici dovuti al loro interagire con il formalismo. Non per nulla negli anni della revisione Hegel rimaneggia completamente l'ordine logico che aveva seguito in precedenza ed aggiunge *ex novo* altre due *Note* alla prima *Nota* presente nella prima edizione della *Logica* [1].

Per la verità questi rimaneggiamenti assumono a volte delle caratterizzazioni alquanto curiose. Ad esempio, come avremo modo di vedere piú oltre, le riflessioni di L'Huilier sulle *serie* (che Hegel conosceva di prima mano) continuano a costituire implicitamente un punto di riferimento estremamente importante, ma Hegel in qualche modo le ritiene superate dalla successiva teoria di Lagrange che avrebbe il merito di riprenderle sviluppandole in modo piú efficace. Nello stesso tempo, sempre secondo Hegel, le basi dell'impostazione di L'Huilier si troverebbero già nell'impostazione newtoniana. Onde per cui Hegel sopprime tutte le citazioni relative a L'Huilier (abbondantemente presenti nella prima edizione) e le distribuisce in egual misura fra Newton e Lagrange.

Questa esigenza di compattificazione induce Hegel ad inevitabili imprecisioni. Ad esempio che il rapporto differenziale dy/dx rappresenti un unico simbolo all'interno del quale sia dy che dx non sarebbero altro che delle semplici p a r t i g r a f i c h e, senza alcun valore matematico autonomo, è una tesi decisamente sostenuta da L'Huilier e non (in modo esplicito) da Newton come sembrerebbe far intendere Hegel nella sua revisione. Allo stesso modo affermare che il merito di Lagrange consisterebbe nel fatto di esser partito direttamente dalla *serie di Taylor* e nell'aver definito la *derivata* quale *coefficiente del termine di primo grado* della serie stessa, non può in alcun modo essere ascritto ai meriti di Lagrange. Quest'ultimo infatti, da questo esclusivo punto di vista, non fa altro che codificare un'esigenza pragmaticamente operativa presso i matematici, e nel caso specifico non fa altro che riprendere quanto già aveva sostenuto L'Huilier nella sua *memoria* vincitrice del *Preisaufgabe*.

Quello che risulta alquanto stupefacente è il fatto che Hegel era perfettamente in grado di padroneggiare queste distinzioni, infatti ne-

[1] Per mettere a confronto i differenti tipi di approccio al problema Barrow-Fermat segnati rispettivamente dai periodi della prima stesura e della revisione cfr. *Gesammelte Werke*, cit., Bd. 11, p. 172 e *Werke*, Bd. III, pp. 342 ss. e 377 s. A questo proposito occorre tener presente che nella seconda edizione le citazioni di Barrow e Fermat sono effettuate in un contesto che prevede la considerazione del *calcolo differenziale* nel rapporto con il suo *campo di applicazione* (cioè con la sua metafisica) e questa prospettiva non era presente nella prima edizione.

gli anni della prima stesura è estremamente preciso nelle attribuzioni; qui la *memoria* di L'Huilier viene considerata il punto nodale circa la considerazione del rapporto differenziale come un *unico simbolo* e nella considerazione delle *serie* come punto di partenza all'interno del quale si definiscono le concettualità del calcolo differenziale [2].

Perché allora queste imprecisioni? Abbiamo già detto che l'obiettivo di Hegel è quello di delineare l'*iter* logico dello sviluppo del calcolo differenziale e da questo punto di vista quello che a lui sembra piú significativo sono i momenti salienti in cui si realizza l'interazione tra la metafisica ed il formalismo. L'intento è quello di sintetizzare, mediante figure di matematici particolarmente rappresentativi, i momenti stessi. Ed indubbiamente la figura di Lagrange, vista sotto questo particolare profilo, è estremamente adatta a costituire il momento esemplificativo della formalizzazione del concetto matematico di funzione.

Infatti la *Théorie des fonctions analytiques* può essere considerata storicamente il punto di arrivo di un programma iniziato già nel 1748 con l'*Introductio* di Euler; inoltre la dimostrazione data da Lagrange circa la rappresentabilità algebrica di qualsiasi funzione mediante la serie ebbe un grosso rilievo in relazione al problema dei fondamenti del calcolo differenziale.

La situazione finí per orientare Hegel ad una considerazione di Lagrange particolarmente esemplificativa del momento della formalizzazione anche se Hegel stesso non riteneva affatto (come invece riteneva Lagrange) che la serie costituisse una rappresentazione algebrica del concetto matematico di funzione.

Lo stesso ragionamento è valido anche per Newton. Hegel lo ritiene l'esponente principale di quell'indirizzo che affrontava i differenziali mediante *definizioni ad hoc*. Quindi finisce per citare, relativamente all'argomento, quasi esclusivamente Newton.

È evidente che in questa prospettiva è costretto a dilatare alquanto le posizioni teoriche dei due matematici al fine di conferire loro uno *status* particolarmente rappresentativo, e nel far questo attribuisce aspetti teorici che non appartengono loro in senso stretto (è il caso di Newton) o non sono loro peculiari (è il caso di Lagrange).

Malgrado l'introduzione di tali imprecisioni Hegel raggiunge notevoli obiettivi nei confronti della prima stesura. Intanto mette a punto

[2] Circa le citazioni di L' Huilier nella prima edizione della *Logica* cfr. *Gesammelte Werke*, cit., Bd. 11, pp. 171 e 174.

un vero e proprio criterio per giudicare l'efficacia della formalizzazione, ascrivibile alla prerogativa di quest'ultima di incidere sulle nozioni della metafisica scavandole in profondità; quindi, mediante le sue considerazioni sul problema dell'integrazione (non presenti nella prima edizione), copre con nozioni precise il problema generale dell'eccedenza di contenuto in estensione che la stessa metafisica esibisce nei confronti della formalizzazione.

In questa prospettiva Hegel si serve delle notazioni storiche che Hauff aveva aggiunto a guisa di commento integrativo, alla sua traduzione tedesca delle *Réflexions* di Carnot [3]. Poteva contare inoltre su di una grossa opera di storia della matematica scritta da Kaestner, del quale Hegel era già stato attento lettore.

Kaestner, oltre che matematico professionale, era anche uno storico della matematica e negli anni dal 1796 al 1800 pubblicò una storia della matematica in quattro volumi (*Geschichte der Mathematik*), che può essere considerata il primo sforzo monumentale per dare una delineazione organica agli sviluppi della matematica [4].

L'opera di Kaestner ebbe immediatamente una rapida diffusione, stante gli orientamenti storici favoriti dagli interessi epistemologici suscitati dal dibattito sui differenziali; questo anche se la parte piú corposa dell'opera è relativa alla matematica nel Rinascimento.

Hegel sicuramente non conosceva questo lavoro negli anni della prima stesura né tantomeno poteva conoscerlo a Jena. Negli anni della revisione Hegel con ogni probabilità si ispira, anche se per linee generali, proprio alla *Storia della Matematica* di Kaestner. Diciamo con ogni probabilità in quanto mancano elementi sicuri di questo fatto. Tuttavia se guardiamo all'ampia sintesi d'insieme che Hegel dedica allo sviluppo della matematica a partire dal periodo greco per finire a quello segnato dal calcolo differenziale, non ci può sfuggire il fatto che Hegel codifichi i vari momenti storici sulla base dell'evoluzione segnata dal *Principio*

[3] Come abbiamo già avuto modo di dire, tre anni dopo l'edizione parigina delle *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal* (1797), Hauff ne curò una edizione tedesca corredata da aggiunte e notazioni storiche: *Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung*, cit.

[4] Cfr. G. Kaestner, *Geschichte der Mathematik*, 4 voll., Göttingen 1795-1800. L'opera fu eseguita come contributo specifico, relativo alla matematica, nella piú ampia prospettiva di una storia complessiva della scienza concepita nell'ambiente di Göttingen.

di omogeneità. E da questo punto di vista le notazioni storiche di Hauff risultano inutilizzabili, cosí come non ci paiono sufficienti i manuali di *reine Mathematik* che pure Hegel possedeva. Pertanto ci pare fortemente probabile (visto che era l'unica fonte completa sull'argomento) che Hegel si sia servito proprio della *Storia della Matematica* di Kaestner, non trascurando il fatto che Kaestner era molto familiare ad Hegel.

Su queste basi e con questi strumenti Hegel si accinge ad una completa revisione, che in molti punti, come abbiamo già anticipato, implica lo sviluppo di temi completamente nuovi. Revisione che ha obbligato Hegel, sotto la guida degli studi storici cui fa riferimento e con l'evidente curiosità di verificarli, ad ulteriori approfondimenti testuali.

3.2. *La Metafisica del nuovo calcolo.*

Hegel sostanzialmente non muta opinione relativamente ai motivi che, in sede storica, hanno determinato il sorgere di una nuova metafisica all'interno della matematica. Già a Jena e durante gli anni della prima stesura, Hegel si rende conto che il problema prende l'avvio dalla necessità di determinare, in sede geometrica, un metodo generale per la costruzione delle tangenti alle curve.

I metodi di costruzione delle tangenti, prima di allora, erano specifici per ogni curva: ciò che valeva per il cerchio non poteva valere per l'ellisse, e ciò che valeva per l'ellisse, a sua volta, non era piú valido per la parabola, e cosí via. Si riuscí ad ottenere la generalizzazione voluta seguendo una via indiretta: in luogo di considerare subito la tangente si partí dalla costruzione della secante, di cui la tangente fu considerata un caso limite.

Occorre precisare che questo fatto rivoluzionò gli usuali metodi di intendere rispettivamente la secante e la tangente. Prima di allora, infatti, i due concetti venivano rigorosamente tenuti distinti; per le secanti valevano teoremi affatto differenti da quelli delle tangenti e non era affatto proponibile una trattazione comune dei due concetti. Hegel si rende conto di questa portata rivoluzionaria, tanto che, a suo modo di vedere, la considerazione della tangente, quale caso limite della secante implica la nozione concettuale di mutamento.

Hegel ritiene che i fondatori della nuova metafisica adoperino il concetto di sezione corredandolo della nozione intuitiva di infinitamente piccolo; e ciò, a suo parere, rappresentava una sorta di risposta ingenua al fatto che la sezione non poteva rientrare nei paradigmi classici del rigore basati sulla proprietà di esaustione.

Di fatto, sempre secondo Hegel, il metodo geometrico degli indivisibili (caratteristico di questo tipo di approccio metafisico) si reggeva intuitivamente sugli *infinitesimi* sia nel caso in cui non veniva fatto un uso esplicito del *triangolo caratteristico* (Fermat) sia, a maggior ragione, in quei casi in cui era effettivamente usato [5].

Barrow, secondo Hegel, rappresenta la seconda prospettiva in cui viene fatto uso del triangolo caratteristico [6].

Tuttavia — sempre secondo Hegel — un fatto estremamente importante si è verificato ugualmente. Con l'introduzione dell'infinitamente piccolo, quindi del triangolo caratteristico, si è prefigurato un campo di indagine completamente nuovo. Si è realizzata una Metafisica orientata all'indietro, atta a recuperare quei contenuti dell'infinito cui la formalizzazione classica, basata sulla teoria delle proporzioni, aveva dovuto rinunciare.

Si realizza pertanto una rottura con gli *standard* classici la quale introduce nuovi contenuti all'interno dell'indagine scientifica. Non per nulla, prosegue Hegel, gli *scopritori del nuovo calcolo* ereditarono inalterate queste procedure (i metodi di costruzione delle tangenti) e le tradussero in un calcolo simbolico.

In questo senso Hegel affronta due temi che non erano presenti all'epoca della prima edizione della Logica. In primo luogo ci fa vedere in che modo la formalizzazione, segnata dalla serie di Taylor, finisca per incidere decisamente sulla metafisica approfondendone le nozioni cruciali; in secondo luogo ci fa vedere, con un esempio concreto, in che modo la metafisica, pur modificandosi relativamente ai risultati ottenuti dalla formalizzazione, sia dotata di un contenuto piú esteso,

[5] Hegel trova schizzato il metodo di Fermat nelle note storiche aggiunte da Hauff alla traduzione tedesca delle *Réflexions* di Carnot: *Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung*, cit., p. 65 ss. Circa Fermat cfr. *Methodus ac disquirendam maximam et minimam*, in *Oeuvres de Fermat*, a cura di P. Tannery e Ch. Henry, Paris 1891-1922, vol. I, p. 135.

[6] Hegel, anche nel caso di Barrow, risulta fortemente influenzato dalla delineazione che ne dà Hauff: cfr. *Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung*, cit., p. 69 ss. Tuttavia Hegel stesso successivamente studia direttamente le *Lectiones* di Barrow. A questo proposito cfr. I. Barrow, *Lectiones geometricae: In quibus praesertim generalia curvarum linearum symptomata declarantur*, Londini 1670. Hegel si riferisce alla *Lectio* X, p. 80 ss.

tanto da conservare, nei confronti della stessa formalizzazione, una sua autonomia irriducibile. In questo secondo caso si riferisce, per la prima volta in modo esplicito, agli effetti segnati dal dibattito sulle corde vibranti.

Hegel ritiene che il punto piú alto segnato dalla formalizzazione sia rappresentato dalla serie di Taylor, quindi ritiene che Lagrange, con la sua *Théorie des fonctions analytiques* possa essere ritenuto particolarmente rappresentativo di tutto un arco storico che va dall'*Introductio* (1748) di Euler per giungere sino ai recenti risultati della *höhere Mathematik.*

L'uso della serie di Taylor, fatto da Lagrange nella sua *analyse directe des fonctions*, secondo Hegel, si uniforma perfettamente all'esigenza storica di conferire una formalizzazione rigorosa alla metafisica del calcolo differenziale. In questo modo si ottiene una struttura formale perfettamente coerente, in cui le nozioni semimateriali della metafisica risultano implicitamente definite dalle nuove regole di calcolo. La *derivata* rappresenterebbe il *coefficiente del termine di primo grado* della serie, il *differenziale* un *operatore* del nuovo calcolo simbolico, l'*integrazione* rappresenterebbe l'*operazione inversa* della differenziazione e cosí via. Il tutto completamente all'interno del nuovo rigore senza alcun riferimento a supporti intuitivi (quali quelli rappresentati dal movimento) scarsamente padroneggiabili dal punto di vista formale [7].

Tuttavia Hegel non ritiene che questo sia il merito principale di

[7] Per quel che riguarda l'*analyse directe des fonctions* presso Lagrange cfr. *Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1797, p. 2 ss. Circa le osservazioni hegeliane su Lagrange cfr. *Werke*, Bd. III, pp. 315 ss., 319 ss. e 345 ss. Come abbiamo visto l'obiettivo di Lagrange era quello di dedurre algebricamente la *serie di Taylor* unitamente alla *formula del resto* in modo da fornire la *höhere Mathematik* di una fondazione algebrica. Per Hegel questa prospettiva risulta del tutto improponibile in quanto la *höhere Mathematik* si regge su di una metafisica dell'infinito completamente diversa da quella algebrica. Onde per cui la *serie di Taylor* risulta già fondata dalla sua metafisica senza alcuna necessità di ricorrere a punti di vista parziali. Hegel costruisce questa sua convinzione sempre sui problemi originati dal dibattito sulle corde vibranti, in cui risultava evidente il maggior contenuto in estensione della metafisica nei confronti della formalizzazione. Stando cosí le cose Hegel valorizza quegli aspetti della *analyse directe des fonctions* che non sono affatto peculiari di Lagrange. Il fatto di trattare le funzioni mediante la *serie di Taylor* era semplicemente dato per presupposto da Lagrange come un fatto generalmente operante in matematica, caso mai il suo problema era quello di far vedere che ogni funzione poteva essere rappresentata algebricamente in questo modo.

Lagrange. Come abbiamo visto Hegel era perfettamente al corrente che la formalizzazione delle funzioni mediante la serie di Taylor risultava operante presso i matematici dell'epoca indipendentemente dalla *Théorie des fonctions analytiques*. Il merito originario di Lagrange — sempre secondo Hegel — consisteva invece nell'aver distinto con chiarezza la metafisica dalla formalizzazione, mostrando in che modo il rigore formale influisse sulle nozioni della metafisica.

Hegel vede in questa distinzione la possibilità di rompere il circolo vizioso tipico delle *teorie ad hoc*. Infatti se teniamo presente il metodo delle *prime e ultime ragioni* e la *teoria dei limiti* rispettivamente di d'Alembert e di L'Huilier, possiamo rintracciarvi un elemento comune. In tutti e due i casi vengono introdotte *definizioni ad hoc* che tolgono ogni significato matematico ai simboli differenziali: si enuncia, in modo del tutto artificiale, che il rapporto dy/dx non rappresenta affatto un rapporto bensí un *unico simbolo* di cui rispettivamente dy e dx rappresentano semplici *parti grafiche* senza alcun valore matematico autonomo [8].

In questo modo — secondo Hegel — oltre ad inibirsi la possibilità di comprendere il valore del simbolo differenziale nella serie, ci si inibisce altresí la possibilità di comprendere la natura del suo impatto nei confronti della metafisica [9].

Ad Hegel sembra che il merito maggiore di Lagrange consista pro-

[8] Come abbiamo già avvertito questa teoria è tipica di L'Huilier. Hegel, non del tutto legittimamente, pensa che Newton sostenga la stessa cosa.

[9] L'interpretazione della *serie di Taylor* come una *struttura* costituita da un *nuovo calcolo formale* risale già agli anni della prima stesura della *Logica*. La serie rappresenterebbe un semplice *calcolo di funzioni*, queste ultime rappresentate dalle cosiddette *funzioni del potenziamento di primo, secondo, terzo grado*, etc., corredato da *operatori specifici*, quali il simbolo di *addizione* ed *i*. In questo senso la funzione operazionale di *i* risulterebbe *neutra* sia per la moltiplicazione che per l'elevazione a potenza, tanto che — osserva Hegel — lo si sarebbe potuto denotare direttamente col simbolo dell'unità evitando tutti i problemi storici dovuti al *tralasciamento* (tenendo presente, però, che non si tratta del medesimo *uno* presente nei numeri naturali dove il simbolo rappresenta una semplice *quantità*). Per concludere, la *nuova teoria* consisterebbe in una s t r u t t u r a d i f u n z i o n i s i m b o l i c h e, corredate da o p e r a t o r i s p e c i f i c i atti ad articolare il calcolo. Cfr. *Werke*, Bd. III, pp. 315 s. e 319 ss. Per apprezzare appieno l'interpretazione hegeliana della *serie di Taylor* cfr. A. Lusternik e S. Petrova, *Les premières étapes du calcul symbolique*, « Revue d'Histoire des Sciences » (1972), in cui vengono esaminate (con un riferimento specifico a Lagrange) le fasi iniziali dello sviluppo del moderno *calcolo simbolico*.

prio nel fatto di aver messo in evidenza questo tipo di impatto.

A questo proposito Hegel ritiene che il cosiddetto campo di applicazione di una teoria rappresenti una realtà che in un certo qual modo la precede. Trattasi di quella realtà che viene appunto organizzata globalmente dalla metafisica.

Relativamente alla *höhere Mathematik* sono appunto le caratteristiche globali, mediante cui viene identificata la tangente come caso limite della secante, che dimostrano come quello che ordinariamente viene denotato « campo di applicazione » rappresenti invece una metafisica che precede la teoria [10].

Quindi, non si può pensare che una teoria abbia la sua eventuale verificazione in un contesto concreto esistente di per sé, al contrario la verificazione consisterebbe nella capacità di scavare in profondità una realtà globale che in certo quel modo è già stata prefigurata in anticipo. È evidente che, stando cosí le cose, la verificazione viene misurata dalle caratteristiche *in profondità* che l'impatto della teoria formale ha nei confronti della sua metafisica.

Secondo Hegel, per renderci ragione di questo tipo di impatto, ed apprezzare l'epistemologia di Lagrange, basterebbe prendere in considerazione la *théorie du contact* in cui Lagrange stesso fa vedere come, ai risultati deduttivi della serie di Taylor, corrisponda una realtà geometrica, basata quest'ultima sulla logica relazionale della posizione.

Infatti Lagrange fa vedere come la serie di Taylor abbia un corrispettivo geometrico, traducibile appunto come *théorie du contact*, in cui il contatto della tangente alla curva sarebbe rappresentato da posizioni peculiari. Posizioni che Hegel interpreta nella stessa prospettiva qualitativa o relazionale tipica degli sviluppi dell'*analysis situs* [11].

[10] Cfr. *Werke*, Bd. III, pp. 345 ss., 355 ss. e 377. Hegel, in questo contesto, precisa che la dizione *campo di applicazione* è stata formulata in questo modo dai matematici solo *a-posteriori* cioè d o p o che la teoria era già stata sviluppata. In realtà — secondo Hegel — si tratta della metafisica che ha reso possibile la teoria stessa. Per queste ragioni la seconda *Nota*, aggiunta da Hegel durante la *revisione*, anche se il suo *sottotitolo* porta la dizione di *applicazione* (la dizione esatta è *Lo scopo del calcolo differenziale dedotto dalla sua applicazione*), in realtà affronta il problema del rapporto tra la teoria formale e la sua metafisica.

[11] Circa la *théorie du contact*, presso Lagrange, cfr. *Théorie des fonctions analytiques*, cit., p. 122 ss. Circa l'interpretazione hegeliana cfr. *Werke*, Bd. III, p. 345 ss. Occorre rilevare che l'interpretazione hegeliana falsa completamente le intenzioni di Lagrange. Quest'ultimo infatti si proponeva di dedurre dalla teoria generale la *geometria delle tangenti*, considerandola quindi una vera e propria

E quest'ultimo aspetto, sempre a detta di Hegel, rappresenterebbe la prospettiva del concreto, il cui contenuto, come già aveva evidenziato il dibattito, posteriore al problema delle corde vibranti, è in una certa misura irriducibile al formalismo.

L'esempio piú peculiare al proposito sarebbe rappresentato dall'autonomizzazione dell'*integrazione* dal suo rigido significato formale. Anche questo, come abbiamo già avuto modo di vedere, era il risultato tipico del dibattito sulle corde vibranti. Ed era proprio in virtú di questo fatto che Boscovich aveva codificato la corrispettiva autonomizzazione del concetto di continuità dalla prospettiva formale segnata dalla serie di Taylor.

Hegel precisa che, da un puro punto di vista formale, cioè relativamente alle serie, il significato dell'integrazione risulta totalmente esaurito all'interno della derivazione, infatti vi risulta definito come *operazione inversa* di quest'ultima; tuttavia risulta altrettanto evidente che, relativamente ai contenuti non dominabili dall'istanza formale, l'integrazione, come del resto la continuità, conserva significati suoi propri, connessi con l'*analysis situs*, e come tali completamente indipendenti dalla derivazione stessa [12].

Da questo punto di vista l'integrale acquisterebbe lo stesso significato, implicito nella logica relazionale, della *posizione*: tratterebbesi di una *posizione limite* di una somma.

branca dell'analisi. Il tutto senza alcun ricorso ad intermediazioni intuitive. Del resto Lagrange usa lo stesso criterio anche relativamente alla meccanica, pensando che le leggi del moto potessero essere dedotte razionalmente dall'analisi. Hegel in questo senso fornisce una interpretazione di Lagrange tesa a collocarlo nel contesto teorico del rapporto fra metafisica e formalizzazione, quando al contrario l'obiettivo di Lagrange era proprio quello di liquidare la metafisica a favore di una rigida istanza deduttiva. Curiosamente Hegel, relativamente alla meccanica razionale, interpreta correttamente Lagrange, tanto da muovergli l'obiezione di aver rinunciato alla mediazione metafisica; al contrario, in modo totalmente arbitrario, pensa che Lagrange, relativamente alla geometria, sia collocabile in quel contesto teorico, sviluppatosi dopo il dibattito sulle corde vibranti, che considerava la metafisica del concreto piú estesa, quanto al suo contenuto, rispetto alla formalizzazione.

12 Occorre tener presente che, proprio in virtú di questi motivi, Hegel, durante gli anni della revisione, aggiunge *ex novo* due *Note* relative alla metafisica del calcolo differenziale, una delle quali tratta appunto il problema della deduzione del calcolo differenziale dal campo della sua applicazione.

I vecchi indivisibili di Cavalieri, visti in questa nuova prospettiva relazionale, perderebbero tutti gli equivoci, impliciti nella prospettiva estensionale.

Infatti gli indivisibili venivano considerati, in certo qual modo, come nozioni atomiche atte ad aritmetizzare il continuo e da questo punto di vista, a detta di Hegel, si finiva per restare imprigionati negli equivoci tipici dell'estensione [13].

In sostanza l'integrazione rientrerebbe nel classico paradosso della doppia asserzione, già incontrato da Hegel all'epoca delle *Geometrische Studien*. Da un punto di vista formale può essere qualificato come *operazione inversa della differenziazione*, relativamente all'*analysis situs* acquista un altro significato: è il *limite* di una somma.

Con questo Hegel termina il suo breve *excursus* sulla matematica; e lo fa proprio concentrando l'attenzione su quel fenomeno storico, aperto da Euler nel 1755, che individua la possibilità di una doppia prospettiva del campo matematico: quella funzionale e quella relazionale.

Se, a questo punto, diamo uno sguardo complessivo al filo delle argomentazioni hegeliane, non avremo alcuna difficoltà a coglierne l'aspetto centrale.

Il filosofo di Stoccarda si trova a dover riflettere su strutture di pensiero la cui efficacia risultava direttamente proporzionale alla loro capacità di sopportare dei veri e propri paradossi.

[13] Hegel si riferisce all'affermazione di Cavalieri secondo cui tutte le *figure geometriche* stanno nello stesso rapporto di tutti i loro indivisibili. Cfr. Cavalieri, *Geometria indivisibilium continuorum nova quodam ratione promota*, Bononia 1635, Lib. I, Propos. 11. Occorre rilevare che piú tardi Cavalieri ritorna su questa sua affermazione e precisa di non aver mai voluto equipararne il *continuo* alla totalità dei suoi *indivisibili*, bensí di aver voluto solo affermare che tra le *figure geometriche* e la totalità dei loro *indivisibili* esistono gli stessi rapporti numerici. Cfr. *Exercitationes geometricae sex*, Bononiae 1647, Exercitat. III, Cap. VII, p. 200. Tuttavia Hegel ritiene che questa precisazione non modifichi sostanzialmente i termini della questione e che nonostante tutto siano conservati gli equivoci tipici di una concezione atomistica. Le valutazioni positive che Hegel dà di Cavalieri, riferite in gran parte alla *Geometria*, sono relative alla sua concezione dell'*indivisibile* come di una *nozione funzionale*. A questo proposito ed a proposito del rapporto generale tra Hegel e Cavalieri cfr. J. O. Fleckenstein, *Hegels Interpretation der Cavalierischen Infinitesimalmethode*, in *Hegel-Studien*, vol. suppl. XI, Bonn 1974, pp. 117-124. Relativamente alle *citazioni* hegeliane cfr. *Werke*, Bd. III, p. 372 ss.

Non soltanto tenta di comprenderne il senso qualificando la contraddizione come un fatto logico fondamentale, ma finisce per riferirsi agli stessi paradossi come altrettanti centri motore dello sviluppo del pensiero scientifico. Soprattutto negli anni della revisione, come abbiamo avuto modo di vedere poco sopra, finisce per servirsene come criteri di valore per sistematizzare le fasi salienti di un percorso storico.

La circolarità, l'autogiustificazione ed il carattere produttivo della negazione si trovano già situate nell'epistemologia matematica dell'epoca. La loro apparente inadeguatezza Hegel la traduce in una essenziale adeguatezza relativamente al piano complessivo dello sviluppo del pensiero matematico.

Nel far questo ci offre una riflessione filosofica sull'epistemologia matematica della seconda metà del settecento (piú che sulla matematica, come qualche volta viene sostenuto) che riesce a cogliere con estrema efficacia tutti gli enigmi che, allora, erano alla base della nuova prospettiva relazionale.

INDICE DEI NOMI

Stampato presso la Tipografia
Edit. Gualandi S.n.c. di Vicenza